武汉大学学术丛书

Wuhan University Academic Library

相对论与相对论重力测量



申文斌 宁津生 晁定波 编著



武汉大学出版社
WUHAN UNIVERSITY PRESS



武汉大学学术丛书 Academic Library

相对论与相对论重力测量



ISBN 978-7-307-06384-6

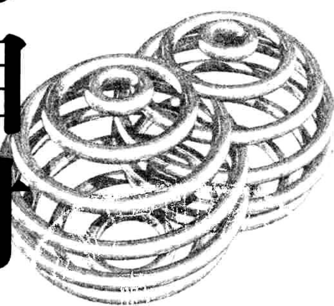
定价: 46.00元

相对论与相对论重力测量

武汉大学学术丛书

Wuhan University

Academic Library



申文斌
宁津生
晁定波 编著



WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

相对论与相对论重力测量/申文斌,宁津生,晁定波编著.—武汉:武汉大学出版社,2008.12

武汉大学学术丛书

ISBN 978-7-307-06384-6

Ⅰ.相… Ⅱ.①申… ②宁… ③晁… Ⅲ.①相对论 ②相对重力测量 Ⅳ.O412.1 P223

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 078446 号

责任编辑:王金龙　　责任校对:程小宜　　版式设计:支 笛

出版发行:**武汉大学出版社**　(430072 武昌 珞珈山)

(电子邮件:cbs22@whu.edu.cn 网址:www.wdp.com.cn)

印刷:武汉中远印务有限公司

开本:720×980 1/16　印张:21.5　字数:302 千字　插页:3

版次:2008 年 12 月第 1 版　2008 年 12 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-307-06384-6/O·387　定价:46.00 元

作者简介



申文斌

1960年10月生，新疆昌吉人；1996年获奥地利格拉茨技术大学博士学位；武汉大学教授、博士生导师、珞珈学者特聘教授；武汉大学测绘学院地球物理系主任，湖北省天文学会副理事长，湖北省地震学会理事，全国高等教育地球科学教学指导委员会委员，武汉大学学报信息科学版、大地测量与地球动力学、测绘科学等杂志的编委；主要从事物理大地测量、相对论大地测量及地球物理教学和研究；主持、参与了多项国家自然科学基金、国家863以及省部级科学技术发展基金项目；倡导学科之间的相互交叉融合发展理念，主张亲近自然、探索自然，推崇多学科、多方位、多元化合作研究；发表学术论文80余篇，合作出版专著、教材3部。



宁津生

1932年10月生，安徽桐城人；1956年毕业于上海同济大学测量系；武汉大学教授、博士生导师；中国工程院院士；全国高等学校测绘学科教学指导委员会主任，国家测绘局科学技术委员会委员，测绘学报编委，大百科全书总编委员，大辞海分科主编等；长期从事大地测量的教学和科研工作，主要研究方向是物理大地测量的理论与方法，包括地球形状、外部重力场及其模型等方面的研究；最先自主建立了我国阶次最高、精度最好的地球重力场模型；主持完成了多项国家自然科学基金、国家863计划和省部级科学技术项目，合作编著和翻译出版教材、专著14部，发表论文200余篇。

作者简介



晁定波

1936年10月生，江西进贤人；1961年毕业于原武汉测绘学院天文大地测量系；武汉大学教授，博士生导师；1982~1984年赴美国俄亥俄州立大学大地测量科学系进修高等物理大地测量和空间大地测量并进行相关课题研究，1994年再次赴美国俄亥俄州立大学进行合作研究；长期从事地球物理大地测量、地球重力场逼近理论和方法的研究；负责完成了多项国家自然科学基金、国家攀登计划、国家863计划及国家测绘局测绘科技发展基金项目；发表学术论文100余篇，合作出版专著、教材11部。

内容提要

本书着重阐述相对论基础以及相对论重力测量。

以历史发展为线索，以第一性原理为准则，以尽可能简明的陈述和逻辑推演，简述了大地测量发展史以及狭义相对论；基于流形概念引入了张量分析以及黎曼几何，阐述了广义相对论基础，讨论并阐述了支持广义相对论的三大经典实验检验以及建立相对论大地测量所需要的各类方程；以广义相对论为基础研究了地球重力场理论，特别探讨研究了与物理大地测量密切相关的重力测量问题；研究了相对论意义下的绝对重力测量和相对重力测量；阐述了相对论大地水准面以及等频大地水准面的概念，给出了利用频移法确定重力位差以及地球外部重力场的方法；阐述了相对论重力梯度测量原理；讨论了引力与惯性力的分离问题。

本书可作为理工科高年级本科生、研究生以及相关科研人员的参考书。

前 言

作为地球科学特别是地球物理学的一个分支，大地测量学具有非常重要的地位。空间技术的发展将大地测量学推向了新的历史舞台，相继诞生了卫星大地测量学、惯性大地测量学乃至更广义的空间大地测量学。

经典大地测量理论以欧几里得空间为背景，以牛顿时空观和经典物理学为基础。大地测量的重要基础之一是物理大地测量，或者说是重力测量理论。传统的重力测量理论以牛顿力学为基础，通称牛顿重力测量理论（简称重力测量）。当相对精度要求接近或高于 $10^{-8} \sim 10^{-9}$ 量级时，牛顿重力测量理论不再保持有效，需要用以广义相对论为基础的重力测量理论——相对论重力测量理论来代替。随着科学技术特别是空间观测技术的发展，观测量的精度越来越高，对许多待确定的量（如位置坐标、重力场、大地水准面等）的精度要求也随之提高。因此，基于时代发展所需，有必要建立相对论重力测量理论。理论往往会走在实践的前面，相对论重力测量也是如此。可以预见，在不久的将来，相对论重力测量将会得到广泛应用。

自 20 世纪 90 年代初，作者开始在相对论大地测量领域从事研

究工作，研究内容涉及GPS、VLBI以及地球自转轴运动的相对论改正，相对论大地水准面的定义，等频大地水准面的定义及其应用，引力与惯性力的分离等专题。随着时间的推移，我们一直想建立一个完整的相对论大地测量体系。本书可以说是一个先导。

考虑到国内外尚没有系统阐述相对论大地测量的专著，同时考虑到非物理专业的大部分读者不太熟悉相对论理论特别是广义相对论，因此，本书在回顾了大地测量发展简史之后，首先介绍和评述了狭义相对论的实验基础，并基于两条基本假设引出了狭义相对论，进而以较大篇幅分析、陈述了基于流形观点的张量分析、黎曼几何、广义相对论的基础和基本理论及其实验检验。在此基础上，详细阐述了相对论重力测量，其中的不少内容是作者的原创性成果，已发表在国内外核心刊物上。

在本书的撰写过程中，注重历史进程及逻辑关系，注重内在联系，尽可能从“第一性原则”出发进行推演和陈述，具有较强的独立性。科学本身在于追求，追求过程在于简明，简明的准则在于“第一性原则”。作为相对论大地测量的导引，书中没有引入近代的关于相对论自身发展的研究成果。

本书的研究内容及成果得到了国家863计划（No. 20060112Z211）、国家自然科学基金（No. 40374004）、测绘遥感信息工程国家重点实验室基金、教育部留学回国基金（2004—2005）、地球空间环境与大地测量教育部重点实验室基金（2003—2005）以及武汉大学留学回国人员启动基金（2004）的资助。书中的索引和插图是由韩建成博士协助完成的，他还做了大量的文字处理、文献收集与整理工作，在此表示感谢。长期以来，相对论大地测量研究方向得到了陈俊勇院士、李德仁院士、刘经南院士、陶本藻教授、金标仁教授的大力支持，在此深表谢意。同时，感谢所有关心和支持我们的同事、朋友以及学术同仁，感谢武汉大学出版社。

本书的出版得到了武汉大学学术基金的资助，特此致谢。

作　者

2008年元月于武汉

目　录

第 1 章

引 论

两千多年以前,毕达哥拉斯(Pythagoras)和亚里士多德(Aristotele,BC 384—BC 322)先后提出了地球是圆球的观点,随后被地理学家、数学家、大地测量学家埃拉托斯(Eratosthenes)证实。但亚里士多德关于自由落体的结论(较重的物体下落得快一些)却被 16 世纪的科学家伽利略(Galileo)推翻。三百多年以前，牛顿（Newton,1687）提出了力学三大定律和万有引力定律，奠定了经典力学体系的基础，其中，牛顿关于地球的一个著名论断是：地球是两极略微扁平而赤道略微隆起的旋转椭球体。这一断言得到了大地测量学家实测结果的支持。经典力学体系是大地测量学的基础。然而，经典力学体系并不完善，它是对自然界物质的力学运动规律的近似描述。因此，更完善的描述需要以广义相对论为基础。当精度要求不高时，采用基于牛顿经典力学的大地测量学理论就足够了。当（相对）精度要求达到或高于 10^{-9} 量级时，就需要利用基于广义相对论的大地测量学理论，即相对论大地测量学。

1.1 大地测量发展简史

1.1.1 欧几里得几何与大地测量学的兴起

早在公元前580—500年,古希腊数学家、哲学家毕达哥拉斯就发现了著名的勾股定理:两个直角边的平方和等于斜边的平方。他还提出了地球为圆球的观点。后来,古希腊哲学家、科学家亚里士多德用物理方法进行了论证,支持毕达哥拉斯的观点。由于亚里士多德的权威性,地球为圆球的说法被普遍接受。

公元前330—275年,古希腊数学家欧几里得(Euclid)创立了几何学的公理体系,从尽可能少的公设出发推演几何图形间的各种关系。欧几里得在《几何原本》(共13卷)开卷中提出了5条公设:

(1)直线与直线之交是点;

(2)若一个圆的圆心落在第二个圆的圆周之上,而第一个圆的圆周上的一点落在第二个圆的圆周之内,则此两个圆必有两个交点;

(3)相等的量加或减同一个量之后所得的诸量仍然相等;

(4)若一个图形与另一个图形完全重合,则各个相应的量(边长、角度等)也相等,反之亦然;

(5)若一直线与另外两条直线相交,且该直线同侧两内角之和小于180°,则当后两条直线无限延长时,必相交于两内角和小于180°之一侧。

对于上述5条公设,前4条是“显然”的,而第5条公设看起来不怎么明显。为此,历史上曾有不少数学家费尽心机企图证明第5条公设可以从前4条公设导出。虽然没有一个人成功,但却导致了非欧几何的诞生(详见1.2.4节)。根据欧几里得的5条公设,可以推演出整个欧几里得几何学。不难推测,正是由于欧几里得几何学的诞生,对于实际应用(如丈量土地、设计建筑物等)具有重要的指导意义。比如,要想知道一个圆的周长或面积,只要测定它的直径(或半径)就行了;要想知道一个圆锥体的体积,只需要测定锥底圆的周长(或半径)以及锥体的高。

我们再回过头来看地球。如果地球是球体,它究竟有多大呢?假设地球的半径是 R,则地面上任意一个大圆的周长为 $2\pi R$。但要想直接测定 R 是不可能的。一个直观的想法就是测定地球的周长。然而测定地球的周长也并非易事,因为难以跨越高山和海洋。有没有什么好办法呢?与欧几里得同时代的古希腊地理学家、数学家埃拉托斯发现了一种测定地球周长的巧妙办法(Bullen,1974;胡明城,鲁福,1993;易舒,1994)。位于尼罗河畔的城市歇尼(Syene),在亚历山大城西南约 800km 处(当时的测量结果是 5000 埃及尺,相当于 5000 埃及尺 ×0.1575km/埃及尺 ≈788km),并恰好在北回归线上。因此,每年夏至正午时分,太阳便正好在歇尼的天顶,阳光直射位于歇尼地区用来预测尼罗河变化的一口井的底部。埃拉托斯设想,如果地球是圆球,当阳光直射歇尼的那口井的底部的时候,阳光应该"斜射"其他地方的建筑物。为此,埃拉托斯在亚历山大城利用一座较高的尖塔测得正午时分阳光的倾斜角为 7.2°(实际值为 7.1°),如图 1.1.1 所示(图中 S 为歇尼城,A 为亚历山大城)。于是,根据亚历山大与歇尼之间的距离(约 788km)可列出如下比例关系:

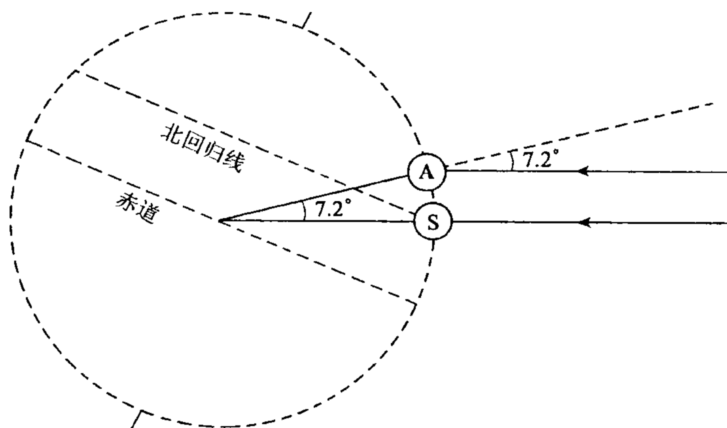


图 1.1.1 埃拉托斯测量地球周长示意图

$$\frac{788}{7.2}=\frac{L}{360} \tag{1.1.1}$$

由此解出地球的周长为

$$L=\frac{788}{7.2}\times 360=39400(\mathrm{km}) \tag{1.1.2}$$

据此推出的地球半径大约为6270km，这与目前测定的地球平均半径$R=6371\mathrm{km}$（地球的平均赤道半径为6378km）比较，相差约100km，相当于1.6%的误差。这一误差主要来源于测量距离的误差，因为当时很难较精确地测定上述两地之间的距离。另外，1埃及尺=0.1575km也是通过考古得到的结果，未必准确（胡明城，鲁福，1993）。Bullen（1974）认为，埃拉托斯得到的结果可能有更大的误差。但无论如何，上述实际测量结果是埃拉托斯的一个重大贡献。如果多选几个类似于亚历山大城那样的点，那么，用埃拉托斯的测量方法即可检验地圆学说。

由上所述，我们认为，大地测量学（确切地说是几何大地测量学）诞生于公元前3世纪的埃拉托斯，可能与欧几里得有密切联系，因为他们不仅生于同一时代，而且都生活在亚历山大城。不过，直到17世纪，大地测量学才作为一门学科而独立存在。随着时间的推移，大地测量学的研究领域在不断拓宽，从几何大地测量到物理大地测量，从陆地测量到海洋测量、航空测量乃至空间测量，等等。目前，大地测量学已成为地球科学领域的一个重要分支。

1.1.2 牛顿力学与物理大地测量学

物理大地测量学是研究地球形状及其外部重力场的学科。牛顿力学（牛顿三大定律和万有引力定律）是物理大地测量学的基础。牛顿（Newton，1687）曾经证明，假定地球由均匀流体所构成，以恒定的角速度旋转，那么，地球应该是两极压缩、赤道隆起的旋转椭球体，并在地球密度分布均匀（且满足流体静力平衡）的假定之下，导出了地球扁率$f=1/230$。牛顿的理论是否正确，可通过弧线测量证实。例如，测定地球子午圈（即经圈）1度纬度差对应的弧长（简称1°子午线弧长）。由椭球大地测量学可知（陈健，晁定波，1989），一段子

午线弧长 ΔX 可近似表示为

$$\Delta X \approx M \cdot \Delta\varphi \approx \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{3/2}} \cdot \Delta\varphi \qquad (1.1.3)$$

其中，φ 为地理纬度（即大地测量学中的大地纬度，参见注释 1.1），M 为子午圈曲率半径，a 为椭球长半轴，e 为椭球第一偏心率。设 b 为椭球短半轴，则有 $e=\sqrt{a^2-b^2}/a$，椭球扁率 $f=(a-b)/a$，且 $e^2=2f-f^2$。

由式(1.1.3)可以看出，赤道附近子午圈曲率半径 $M_{\varphi\approx0°}\approx a(1-e^2)$，小于北极附近子午圈曲率半径 $M_{\varphi\approx90°}\approx\frac{a(1-e^2)}{(1-e^2)^{3/2}}=\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}=C$，即有 $\Delta X_{北}>\Delta X_{南}$（见图 1.1.2(a)），表明此时的地球是一个扁椭球体。若地球的极轴半径（相当于 b）大于其赤道半径（即 $a<b$），则是一个“长椭球”（见图 1.1.2(b)），显然对于这种形状的地球，应有 $\Delta X_{北}<\Delta X_{南}$（见图 1.1.2(b)）。对此进一步的说明见注释 1.2。

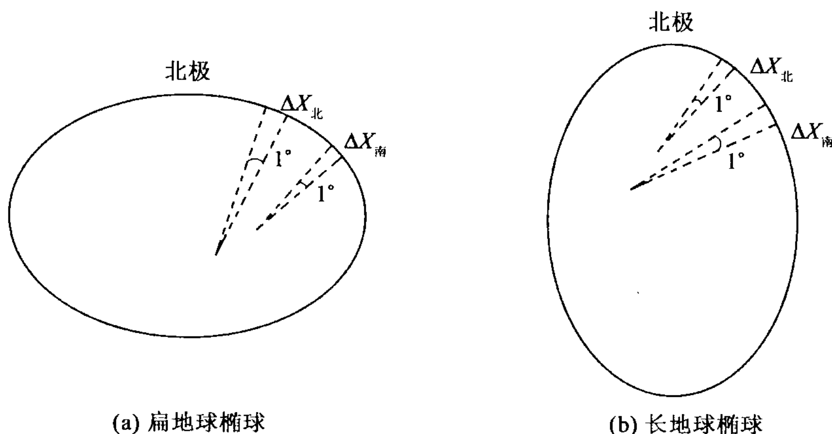


图 1.1.2　两种地球椭球形状假设

为检验牛顿的结论,1683—1718 年,法国卡西尼父子(G. D. Cassini, J. Cassini)利用三角测量法测量了子午线弧长。根据测量结果,却得出了纬度越高、1°子午线弧长越短的结论,并计算出地球的扁率为 -1/95,即认为地球是长椭球,不支持牛顿的结论。由此在科学界产生了一场延续达半个世纪之久的大论战。为解决地球是"扁椭球"还是"长椭球"之争,法国科学院派了两支测量队,一队到赤道附近的秘鲁,一队到北极圈附近挪威的拉普兰(Lapplan)地区。前者从 1735 年到 1743 年、后者从 1736 年到 1737 年分别完成了观测(Safra et al., 2005),求得的 1°子午线弧长数值如表 1.1.1 所示。此表数据证实了地球是一个扁椭球形。1740 年, J. 卡西尼重新观测和计算了法国的弧度测量,改正了原来的错误。此次论战以证实牛顿等人的扁椭球理论而告终。

表 1.1.1　　**18 世纪法国科学院弧度测量结果**

地区	平均纬度	1°子午线弧长
拉普兰	66°20′	111 918m
巴黎	45°20′	111 116m
秘鲁	1°31′	110 604m

上表的结果与现代理论结果的比较见注释 1.2。

同样,测定平行圈弧段长 ΔY 也可求解地球的扁率

$$\Delta Y = r \cdot \Delta\lambda = N\cos\varphi\Delta\lambda = \frac{a\cos\varphi}{(1 - e^2\sin^2\varphi)^{1/2}}\Delta\lambda \quad (1.1.4)$$

其中 r 为平行圈半径,N 为卯酉圈半径,$\Delta\lambda$ 为平行圈上弧段两端点间的经度差。

从式(1.1.4)可以看出,当 $\Delta\lambda$ 固定时,随着纬度的增加,r 迅速减小并趋于零,因此,ΔY 也迅速减小,且减小的速度与 $e^2\sin^2\varphi$ 项相关。当 φ 给定时,可解出 e^2 和 f。

到 20 世纪 40 年代,根据全球范围的地面大地测量结果,得出

$$e^2 = 0.006693421, \; a - b = 21\ 382\text{m}, \; f = 1/298.3$$

克莱洛(Cleiraut)注意到法国科学院在拉普兰和秘鲁的测量工作,并根据牛顿理论对地球形状问题进行了开创性的理论研究。基于流体静力学平衡原理,可建立如下理想液体运动方程(Moritz,1990)

$$\rho\ddot{\boldsymbol{x}} = \rho\boldsymbol{g} - \nabla p \tag{1.1.5}$$

其中,ρ 为地球密度,$\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{g}$ 分别为位置向量和重力向量,∇为梯度算子,p 为压力,$\ddot{\boldsymbol{x}}$ 是 $\boldsymbol{x}$ 相对于时间 t 的二阶导数。在流体静力平衡条件下,根据牛顿理论,此时重力等位面和等压面重合,称为等曲面,是一个平衡椭球面,据此,克莱洛于 1743 年导出了以下著名的方程(克莱洛方程):

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}q^2} + \frac{6}{q}\frac{\rho}{D}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}q} - \frac{6}{q^2}\left(1 - \frac{\rho}{D}\right)f = 0 \tag{1.1.6}$$

其中,f 是椭球扁率,q 是内部各等曲面的平衡半径,$D = D(q)$ 是平均密度。本书中采用的“位”的概念(如重力位、引力位等)与物理学中采用的“势”的概念(如重力势、引力势等)相同,以后不再区分。

式(1.1.6)是一个二阶常微分方程,当给定了两个初始条件时可得到确定解,例如取 $q = R$(地球半径),则 $D = \dfrac{3M}{4\pi R^3} = \rho_m$,它是总质量为 M 的地球的平均密度。求解方程(1.1.6),可确定$\left.\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}q}\right|_{q=R} = \dfrac{1}{R}\left(\dfrac{5}{2}m - 2f\right)$,$m = \dfrac{\omega^2 R^3}{GM}$ =(赤道处离心力)/(赤道处重力),当取 $f \approx 1/298$,$m = 0.00345$,则有$\left.\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}q}\right|_{q=R} > 0$,并可证明这一关系当 $q < R$ 时也成立。因此,当等曲面的 q 值随深度增加而减小时,扁率也随深度增加而减小。在均质地球的情况下,有 $D = \rho$,则方程(1.1.6)可简化为

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}q^2} + \frac{6}{q}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}q} = 0 \tag{1.1.7}$$

解上述方程,得 $f = C_1 q^{-5} + C_2$,其中 C_1 和 C_2 是两个待定常数。不难证明,要想获得有意义的解,C_1 必定为零,因此 f = 常量,这表明均质平衡椭球形状的等曲面是一族相似椭球。

克莱洛进一步假设地球体由层状分布的椭球层构成,每个椭球

面都是重力等位面(见图 1.1.3),各层密度由地心向外逐渐减小,这一假设大体上符合近代地球密度分布模型,例如 PREM 模型(Dziewonski and Anderson,1981)。

由图 1.1.3 可以看出,由于重力等位面呈扁球形,两个重力等位面在北极(南极)地区的间距 Δq_2 小于在赤道地区的间距 Δq_1。由于两个重力等位面之间的重力位差 ΔW = 常数,故 $g_1\Delta q_1 = g_2\Delta q_2$,因此有 $g_2 > g_1$,即极地附近的重力 g_2 大于赤道附近的重力 g_1。一般地说,如果将地表的重力等位面椭球(或称水准椭球)看成地球的一种正常椭球模型,则在其上的重力值从赤道起随纬度的增大而增大。重力是地球引力与自转离心力的合力,离心力 $P = \omega^2\rho_e\cos\varphi = \omega^2 \cdot r$,其中 ρ_e 为地心距,r 为平行圈半径,ω 为自转角速度,离心力方向平行于赤道面向外,在引力方向(指向地心附近)上的分量与引力方向相反,显然在赤道上 P 最大,约达 3.39 伽,随纬度的增加 P 减小,在极地趋于零。离心力是重力随纬度增加而增加起主要作用的因素。

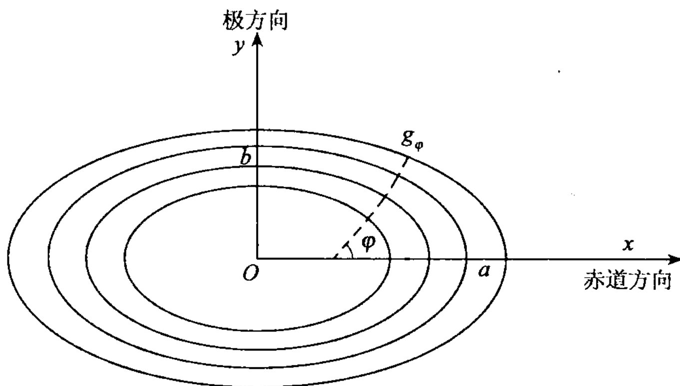


图 1.1.3 重力等位面族.φ 是地理纬度(参见注释 1.2),g_φ 是纬度 φ 处的地面上的重力,O 是地心,Ox 轴位于赤道面,Oy 轴是地球旋转轴,a 和 b 分别是长、短半轴

地球表面(视为水准椭球面)任意一点处的重力加速度与该处的地理纬度 φ 由著名的克莱洛方程联系(Moritz,1990)

$$g = g^e(1 + \beta \sin^2\varphi) \tag{1.1.8}$$

其中

$$\beta = \frac{g^p - g^e}{g^e} \tag{1.1.9}$$

称为重力扁率；g^e 和 g^p 分别表示赤道和两极处的重力，均为常数。

如果在纬度为 φ_i 的地点测得重力 g_i，那么，根据方程(1.1.8)，当获得若干组(φ_i, g_i)之后，便可利用最小二乘原理求出 g^e 和 β，再利用方程(1.1.9)可求出 g^p。有了 g^e 和 β，则可利用方程(1.1.8)确定地球表面上任意一点的重力。克莱洛方程(1.1.8)所表述的内容也称为克莱洛定理，具有重要的应用价值，它揭示了地球扁率(几何量)与地球表面的重力(物理量)之间的内在联系，开创了用物理测量手段研究地球形状的方法。因此，可以认为，物理大地测量学的形成始于克莱洛。克莱洛的名著《地球形状理论》(1743)是物理大地测量学的经典作品。然而，直到司托克斯(Stokes，1845)，物理大地测量学才真正确立了在大地测量学甚至地球物理学中的重要地位。斯托克斯证明了一个定理(Stokes，1845)：如果知道了水准面 S 的形状以及 S 上的重力位和旋转角速度 ω，则可唯一地求出 S 面上及其外部空间的重力位以及重力(假定 S 面外部不存在质量)。同时他还证明了逆定理：给定了 S 面上的重力位和重力，并已知 ω，则可唯一地确定 S 面的形状及其外部重力位。因此，为了确定水准面的形状，可以通过重力以及水准测量首先确定 S 面上的重力和重力位(通过归算)，然后根据司托克斯逆定理确定水准面 S 的形状，进而推求地球表面的形状及其外部重力场。斯托克斯逆定理的应用问题又称斯托克斯问题。

用一个适当的旋转水准椭球(或称地球椭球，又称正常椭球)代表地球形状是物理大地测量和整个大地测量学科的一大进展(管泽霖，宁津生，1981；Moritz，1990；李建成等，2003)。在几何大地测量中，包括现代卫星大地测量，地球椭球已应用于建立地表及其外部空间点位最基本的坐标参考系统，即用大地纬度、大地经度和大地高表示的大地坐标系；在物理大地测量中，由给定的地球椭球的四个基本参数，包括自转角速度 ω，椭球长半轴 a，扁率 f(或其他等效量)以及

引力常数 G 与地球总质量 M 的乘积 GM(地心引力常数),可唯一确定椭球外部的重力场,称为正常重力场,已作为研究真实地球重力场的参考重力场被广泛应用。地球重力场相对于正常重力场的差称为扰动重力场,相应的重力位称为扰动重力位,通常简称扰动位。地球形状更进一步的精确表述是 19 世纪高斯(Gauss)和李斯廷(Listing)提出的大地水准面概念,即与地球平均海洋面(占地球表面积的 71%)最接近的重力等位面,可用其相对于正常椭球面的起伏,即大地水准面高 N 加以确定。1849 年 Stokes 导出了大地水准面高的计算公式,即

$$N = \frac{T}{\bar{\gamma}} = \frac{R}{4\pi\bar{\gamma}}\iint_{\sigma}\Delta g S(\psi)\,\mathrm{d}\sigma \tag{1.1.10}$$

其中 T 为大地水准面上的扰动位,它是重力位值 W_0(即大地水准面上的重力常数位)与该面上相应点的正常重力位 U 之差,即 $T = W_0 - U$, $\bar{\gamma}$为正常重力平均值, Δg 为重力异常,即大地水准面上一点的重力值 g_0 与正常椭球面对应点正常重力值 γ_0 的差, $\Delta g = g_0 - \gamma_0$, $S(\psi)$为 Stokes 函数:

$$S(\psi) = \frac{1}{\sin\frac{\psi}{2}} - 6\sin\frac{\psi}{2} + 1 - 5\cos\psi - 3\cos\psi\ln\left(\sin\frac{\psi}{2} + \sin^2\frac{\psi}{2}\right) \tag{1.1.11}$$

其中, ψ 为计算点与积分流动点之间的球面角距, σ 为单位球面。

式(1.1.10)即为著名的 Stokes 积分公式,该公式奠定了物理大地测量学的基础,至今仍普遍用于确定大地水准面的计算。N(大地水准面相对于正常椭球面的起伏)的值在全球范围内可达 100 米量级,它反映了地球内部密度异常结构,给出了重力场量 T 与地球形状几何量 N 之间最直接的数学关系。

Stokes 公式的实用化需要全球范围的重力测量数据 Δg。地面重力测量技术始于伽利略(Galileo 1564—1642)发明的重力摆。惠更斯(Christian Huygens 1629—1695)于 1656 年提出用重力摆测定地球表面重力的原理,并于 1673 年制成重力摆仪(Magie,1935; Torge,1989),开创了用仪器测定重力的历史。随着光电技术和精密

机械的发展，到20世纪先后制成了利用自由落体测定重力值的绝对重力仪，以及利用弹性机械系统测定两点之间重力差的相对重力仪，使大规模地面重力测量得以实现。20世纪60年代以后，卫星大地测量迅速发展，通过精密测定卫星轨道，利用牛顿的动力学方程（牛顿第二定律）可反解地球重力场参数。与此同时，发展了卫星对海面雷达测高的技术，可精确测定平均海面，即近似的（海洋区域的）大地水准面。由于卫星重力测量技术的进展，实现了全球范围内中长波重力场的测定和全球重力场模型的建立。根据位理论，地球外部重力场可利用重力边值问题（又称大地测量边值问题）求解，得到用球谐函数为基函数的级数展开表示的地球外部引力位场 V：

$$V(r,\theta,\lambda) = \frac{GM}{r}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^{n}(\overline{C}_{nm}\cos m\lambda + \overline{S}_{nm}\sin m\lambda)\overline{P}_{nm}(\cos\theta)\right] \tag{1.1.12}$$

其中，(r,θ,λ)为计算点的球坐标（它们分别是径向距离、余纬和经度），GM 是地心引力常数，a 是赤道平均半径，$\overline{C}_{nm}$和$\overline{S}_{nm}$为完全规格化的球谐系数，$\overline{P}_{nm}(\cos\theta)$为完全规格化的缔合 Legendre 函数。

式(1.1.12)即为全球重力场模型，可用系数集合$\{\overline{C}_{nm},\overline{S}_{nm}\}$表示。利用卫星重力测量数据解得的重力场参数通常属于此集合。相应地，正常引力位（由正常水准椭球产生）V_{normal}模型可表示为

$$V_{normal} = \frac{GM}{r}\left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}\left(\frac{a}{r}\right)^{2n} P_{2n}(\cos\theta)\right] \tag{1.1.13}$$

其中 J_{2n}和 $P_{2n}(\cos\theta)$分别为带谐（即阶为 n，次 $m=0$）系数和带谐 Legendre函数（半规格化）。

系数 J_2 的物理意义为

$$J_2 = \frac{C-A}{Ma^2} \tag{1.1.14}$$

其中，C 和 A 分别为地球的极惯性矩（相对于 z 轴）和赤道惯性矩（A 相对于 x 轴，B 相对于 y 轴，并假定 $A=B$），J_2 称为动力学形状因子，是地球扁率 f 和 $m=\frac{\omega^2 a}{r_0}=\frac{\omega^2 R}{GM/R^2}$的函数（Heiskanen and Moritz,

1967)：

$$J_2 = \frac{2}{3}f - \frac{1}{3}m - \frac{1}{3}f^2 + \frac{2}{21}fm \qquad (1.1.15)$$

根据上式,若给定 m,则可由 J_2 确定 f,因此 J_2 和 f 是确定地球形状的等效参数。目前利用由卫星重力模型特别是激光测卫(SLR)技术给出的 J_2 已经能精确确定 f。例如在 1980 年全球大地测量参考系(GRS 80)中 $f = 1/298.257$。卫星重力探测进一步精确地证实了地球是一个扁椭球形。

注释 1.1　我们通常所说的大地纬度 φ 是以椭球面法线为基准的,也即地理纬度。P 点的大地纬度(地理纬度)是 P 点的椭球面法线与赤道面的夹角,见图 1.1.3。有时,为了处理问题方便,或作理论问题研究,我们也使用地心纬度 ϕ:P 点的地心纬度 ϕ 是 P 点至地心的连线与赤道面的夹角,见图 1.1.4。地理纬度与地心纬度略有差异,最大约 12′。

注释 1.2　在 1.1.2 节中给出的微段子午线弧长公式(1.1.3)是地理纬度的函数,并由此公式说明了高纬度处 1°子午线弧长大于低纬度处 1°子午线弧长,同时给出了 18 世纪弧度测量结果(表 1.1.1)。我们在 1.1.2 节分析得到的上述关于 1°子午线弧长的结论,是基于地理纬度与子午弧长的关系,这也是在大地测量学中普遍采用的。申子宇(2008)提出,若采用地心纬度来表达 1°子午线弧长(即地心纬度变化 1°所对应的子午线弧长),则会得到相反的结论,为此本注释给出对此论点正确性的说明。此外,我们用 1980 世界大地坐标系采用的 80 国际椭球参数,分别利用地理纬度和地心纬度计算表 1.1.1 中三个纬度处($\varphi = 1°31'$,45°20′ 和 66°20′)相应的 1°子午线弧长,并与该表中给出的曾经对地球形状研究做出过重要贡献的测量结果作比较,验证其可靠性和精度。

设有平面直角坐标系,原点 O 为椭球中心,y 轴与短轴重合指向"北极",x 轴为横轴位于赤道面内,于是,$O-xy$ 平面与椭球面的截线为封闭椭圆(参见图 1.1.4),其方程可表示成

$$x = r\cos\phi$$
$$y = r\sin\phi \qquad (1.1.16)$$

其中,r 为地心距,ϕ 为地心纬度。因为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (1.1.17)$$

由式(1.1.16)和式(1.1.17)可得

$$r = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{1-e^2\cos^2\phi}} \tag{1.1.18}$$

其中 $e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$为椭圆第一偏心率。于是,椭圆方程可写成

$$x = \frac{a\sqrt{1-e^2}\cos\phi}{\sqrt{1-e^2\cos^2\phi}}$$

$$y = \frac{a\sqrt{1-e^2}\sin\phi}{\sqrt{1-e^2\cos^2\phi}} \tag{1.1.19}$$

因为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\phi} = -\frac{a\sqrt{1-e^2}\sin\phi}{(1-e^2\cos^2\phi)^{3/2}}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\phi} = \frac{a\sqrt{1-e^2}(1-e^2)\cos\phi}{(1-e^2\cos^2\phi)^{3/2}} \tag{1.1.20}$$

根据微分弧长公式

$$\mathrm{d}l = \sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2} \tag{1.1.21}$$

由式(1.1.20)和式(1.1.21)可得(申子宇,2008)

$$\mathrm{d}l = \frac{a\sqrt{1-e^2}[1-2e^2\cos^2\phi+e^4\cos^2\phi]^{1/2}}{(1-e^2\cos^2\phi)^{3/2}}\mathrm{d}\phi \tag{1.1.22}$$

现采用80国际椭圆参数,$a=6378137m$,$e^2=0.0066943800229$,并将它们代入式(1.1.22),可计算当ϕ取不同值时,子午线的弧长(即在地心纬度ϕ处$\Delta\phi=1°$所对应的子午线弧长Δl),计算结果表明,随着地心纬度的增加,1°子午线弧长减小(参见图1.1.4)。若考察弧长随地心纬度的变化曲线,可令

$$f(\phi) = \frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}\phi} = \frac{a\sqrt{1-e^2}[1-2e^2\cos^2\phi+e^4\mathrm{soc}^2\phi]^{1/2}}{(1-e^2\cos^2\phi)^{3/2}} \tag{1.1.23}$$

由此可得到$\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}\phi}\equiv f(\phi)$函数曲线(弧长随纬度的变化率),如图1.1.5所示。

分别采用地理纬度和地心纬度计算三个纬度处(地理纬度$\varphi=1°31'$,45°20′和66°20′)相应的1°子午线弧长,并与历史测量结果作比较,结果如表1.1.2所示(申子宇,2008)。

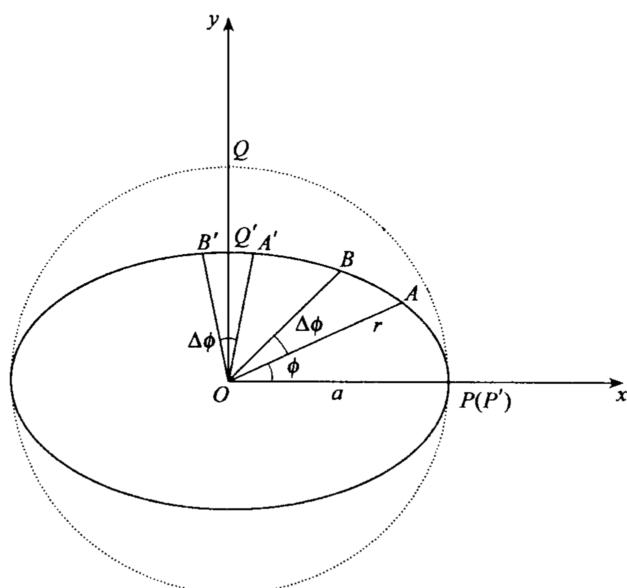


图 1.1.4　参考椭球子午圈

表 1.1.2　分别以地理和地心纬度为准的 1°子午线弧长与法国科学院 18 世纪测量结果比较（申子宇，2008）

地区		拉普兰	巴黎	秘鲁
纬度	地心纬度	66°11′	45°8′	1°31′
	地理纬度	66°20′	45°20′	1°31′
1°子午线弧长理论值(m)	地心纬度	111007.18	111132.13	111319.23
	地理纬度	111512.23	111138.29	110575.06
法国 18 世纪测量值(*m*)		111918	111116	110604
理论值与 18 世纪实测值之差(m)	地心纬度	-911	+16	+715
	地理纬度	-406	+22	-29

从表 1.1.2 可以看出，尽管理论值与实测值相差较大，但以地理纬度度量的结果与实测值符合得较好。计算还表明（申子宇，2008），以地心纬度 ϕ 为准，1°地心

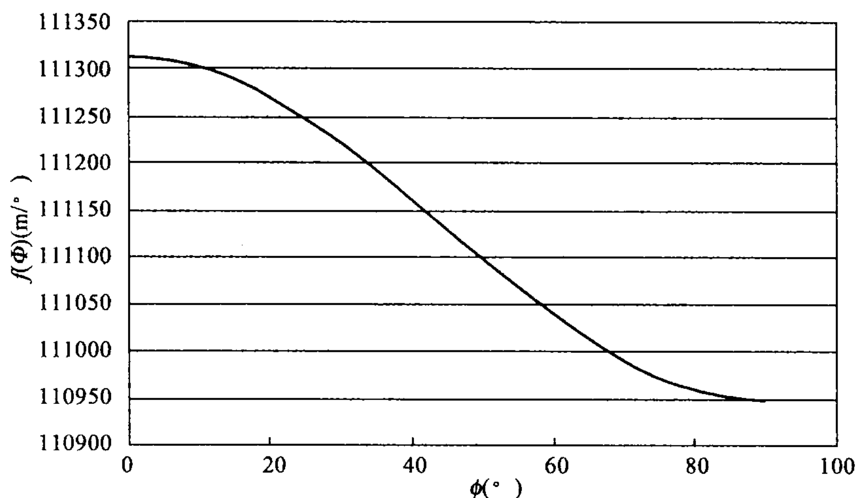


图 1.1.5 子午线弧长随地心纬度的变化曲线

纬度对应的子午线弧长由赤道到北极依次由长变短，纬度 45°处比赤道处短 0.5 *m*，纬度 90°处比赤道处短 373.2 *m*，呈非线性变化，但与用地理纬差 $\Delta\varphi$ 对应的子午弧长 Δl 变化规律相反；后者 45°处比赤道处长 557.5 m，纬度 90°处比赤道处长 1119.7 m，比 45°处长 562.2 m。因此，以地理纬度量度，由赤道到北极 1°子午线弧长依次由短变长；以地心纬度量度，由赤道到北极 1°子午线弧长依次由长变短。这一结果验证了申子宇(2008)提出的观点，即随着地心纬度的增大，所对应的 1°子午线弧长逐渐减小；这也是非大地测量专业人员通常理解的 1°子午线弧长的含义，即 1°地心角所对的弧长。

从本质上讲，只要考察曲率半径(即密切圆半径)随纬度(无论是什么纬度)的变化即可得知是扁椭球或长椭球：如果随着纬度的增大，曲率半径也逐渐增大，则为扁椭球(如图 1.1.2a)；如果随着纬度的增大，曲率半径逐渐减小，则为长椭球(如图 1.1.2b)。不过，由于地球的曲率半径不能直接测定，这种理论上的推演也就不能直接用于检验地球究竟是扁椭球还是长椭球。在空间大地测量出现以前，实际上能测量的量是用三角测量法测定一段弧长，以及用天文测量法测定一点的地理纬度，后者可换算为地心纬度。显然，当时是按 1°子午线弧长随地理纬度变化的规律来检验地球椭球的形状的。如果采用地心纬度，就应按与采用地理纬度相反的规律验证地球是否扁椭球。

1.1.3 惯性大地测量与空间大地测量的兴起

惯性大地测量是20世纪70年代出现的一门新的应用技术,它在大地测量以及军事、导航等领域有重要的应用。惯性大地测量的基本原理是通过惯性元件(比如陀螺仪、加速度计等)感应载体(如汽车、船舶、飞机等)在运动过程中的加速度,通过对加速度进行两次积分从而获得位置信息(祝永刚,徐正扬,1989;董绪荣等,1998)。惯性大地测量的特点是速度快,但精度相对较低。

在惯性测量中,由于载体处于运动状态,惯性元件除了感应惯性力的作用之外,还感应到引力的作用,这两种力是混合在一起的,难以分辨。尽管采用滤波技术可以大部分地消除引力影响,但毕竟不能将引力全部滤掉。因此,在惯性测量中面临的一个重要问题是:如何将引力与惯性力分离。著名大地测量学家 Moritz(1968;1981;1985;1990)曾研究过这个问题。

空间大地测量(主要包括,甚长基线干涉测量 VLBI,卫星激光测距 SLR,卫星多普勒定位,全球定位系统 GPS 等空间定位技术,也包括卫星海洋雷达测高 SRA 和卫星跟踪卫星 SST 等卫星重力技术)是20世纪60~80年代及本世纪初形成的一门新学科,将其归入大地测量学范畴,是因为它的主要研究内容是通过对卫星和河外射电源的观测,解决大地测量中的问题,诸如全球坐标参考框架的建立,精密测定地面点的位置,基线的长度,地壳和板块的运动,地球的形状和大小,地极移动,地球外部重力场及其随时间的变化,大地水准面的起伏,等等(沈镜祥等,1981),但其应用范围却涉及整个地球科学领域。在短短的40多年中,空间大地测量发展极为迅速,对大地测量学乃至整个地球科学产生了重大和深远的影响。

1.2 相对论发展简史

1.2.1 光速恒定原理

在历史上,对于光究竟是粒子还是波这个问题,一直存在着激烈

的争论。惠更斯(1690)是光的波动说的支持者。他认为:光是通过以太传播的,以太遍布整个空间并以振动或冲动所引起的某种弹性作用而充分自由地穿过物体。著名的惠更斯原理就是建立在上述假定之上的。惠更斯原理指出:光波在传播时,产生波的物质的每个质点不仅将运动传给从发光点开始所画的直线上的下一个质点,而且要传给与之接触的以及与其运动相对抗的其他一切质点;结果是,在每一质点的周围,产生了以该质点为中心的波。

牛顿(1672)曾经对光学进行过系统的研究,他的研究暗示了光的微粒性。由于牛顿在科学界中卓越的地位,粒子说曾支配物理学一百多年,直到1803年,Young发表了题为《关于物理光学的实验和计算》一文(Magie,1935)。Young的研究表明,光是一种波。他用波动说成功地解释了光的干涉现象,而这种现象用粒子说无法解释。于是,物理学家又普遍认为,光是一种波,其传播需要借助以太作为媒介。为了解释所观测到的一系列光现象,对以太必须作种种假定。然而,任何企图测定这种以太的实验总是以"失败"而告终(Einstein,1905)。最著名的实验莫过于迈克尔逊和莫雷(Michelson and Morley,1887)实验。迈克尔逊和莫雷在1887年做了一个干涉实验,其意是检测地球相对于以太的漂移速度。如果以太存在,地球在以太海洋中运动,那么,迈克尔逊-莫雷实验所预期的结果将是干涉条纹发生移动,但实验结果是否定的。不过,如果假设以太具有Lorentz收缩性质,则可以解释这个实验(Lorentz,1895,1904),但这个附加条件使物理学家难以接受,因为关于以太的假定太多了。关于光究竟是粒子还是波的问题,目前比较普遍的看法是:光既是粒子也是波,即光具有波粒二象性。这是量子力学玻尔(Bohr)学派的观点(玻尔,1983;曾谨言,2000,2001)。

由于迈克尔逊-莫雷实验在光学发展史上具有重要作用,下面简述其要点。

图1.2.1是迈克尔逊-莫雷实验示意图。光源S发出的一束光在A点由半透明反射镜分成两束,一束光在干涉仪中由A向C传播,经C点的平面镜反射又返回到A,最后经A反射到屏幕(即图示中下面的位置);另一束光则由A反射到B,经B反射回到A,最后经

A 透射到达屏幕。这样,两束光在屏幕上形成干涉条纹。由干涉原理可知,干涉条纹由两束光在干涉仪两个臂中传播的时间差(即光程差)决定。假定$\overline{AC}=l_1$, $\overline{AB}=l_2$,以太漂移的速度 v 为$\overline{CA}$方向。于是,沿$\overline{AC}$方向的光速是 $c-v$,沿$\overline{CA}$方向的光速是 $c+v$,沿$\overline{AB}$和$\overline{BA}$方向的光速均为$\sqrt{c^2-v^2}$。因此,第一束光从 A 到 C 再回到 A 所花费的时间为

$$t_1=\frac{l_1}{c-v}+\frac{l_1}{c+v}=\frac{2cl_1}{c^2-v^2} \tag{1.2.1}$$

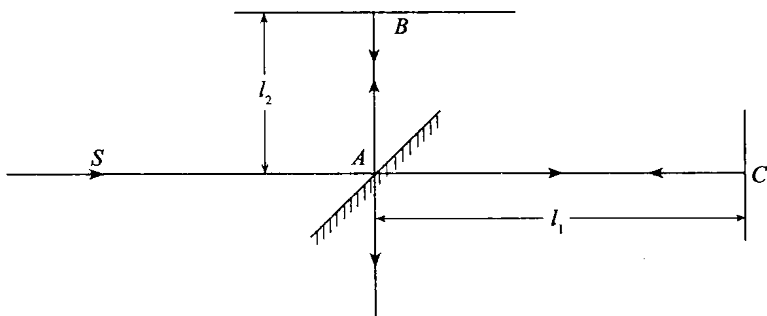


图 1.2.1 迈克尔逊-莫雷实验示意图. S 是光源,A 是半透明反射镜,B 和 C 是反射镜,l_1 和 l_2 分别是 A 至 C 和 A 至 B 的距离

第二束光从 A 到 B 再回到 A 所用的时间为

$$t_2=\frac{2l_2}{\sqrt{c^2-v^2}} \tag{1.2.2}$$

两束光线重新会合时的时间差是

$$\Delta t=t_1-t_2=\frac{2}{c}\left[\frac{l_1}{1-\frac{v^2}{c^2}}-\frac{l_2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right] \tag{1.2.3}$$

将干涉仪在图示平面内按顺时针方向转动 90°,这时,以太漂移方向平行于 AB 连线,因此,两束光的时间差是

$$\Delta t' = -\frac{2}{c}\left[\frac{l_2}{1-\frac{v^2}{c^2}} - \frac{l_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right] \tag{1.2.4}$$

由此可得干涉仪转动前后的时间差改变量为

$$\delta t = \Delta t - \Delta t' = \frac{2(l_1+l_2)}{c}\left[\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right] \approx \frac{l_1+l_2}{c}\left(\frac{v}{c}\right)^2 \tag{1.2.5}$$

相应的干涉条纹移动量为

$$\Delta = \frac{c}{\lambda}\delta t = \frac{l_1+l_2}{\lambda}\left(\frac{v}{c}\right)^2 \tag{1.2.6}$$

其中 λ 是光波的波长。

由方程(1.2.6)可以看出,如果以太理论成立,那么,迈克尔逊-莫雷实验理应检测出地球相对于以太的运动速度。但实验没有发现条纹移动。于是,以太说面临着严重的困难。如果假定以太不存在,情况会怎样呢?就迈克尔逊-莫雷实验而言,地球局部是一个很好的惯性系,在惯性系中,一束光的传播速度应该是不变的,正如一个匀速直线运动的物体会一直保持这种运动速度一样,只要它不受其他外力的作用。就地球实验室范围而言,任何静止光源所发射的光的速度应该是一样的,记为 c(真空中光速),这个速度正是麦克斯韦(Maxwell,1831—1879)所预言的真空中的电磁波速度(Maxwell,1865)。于是,迈克尔逊-莫雷实验的零结果是假定以太不存在情况下的必然推论。尽管迈克尔逊-莫雷实验对放弃以太说起关键性的作用,但对光速恒定原理却起不了什么作用。如果假定光速如普通物体的运动速度一样,具有普通意义下的矢量叠加性(弹射说),那么,仍然可以解释迈克尔逊-莫雷实验。但弹射说当时遇到了一个困难,无法解释双星观测现象。双星实验的大意如下(张元仲,1979):

假定双星 S_1 和 S_2 在一条绕其系统质心的圆形轨道中运动。在 t_1 时刻,S_1 在 A 点,其切向速度的方向指向地球。如果假设此时 S_1 发出的光信号的速度是 $c+v$(即假定弹射说成立),那么,相对于地球上的观察者来说,这个光信号将在 t_1'时刻到达地球:

$$t_1' = t_1 + \frac{L}{c+v} \tag{1.2.7}$$

其中 L 是地球到双星的距离。

设 T 是星从 A 点运动到 B 点(见图 1.2.2)所用的时间,即半周期。因 S_1 星在 B 点的切向速度背离地球(按照弹射说),相对于地球而言,S_1 在 B 点射向地球的光信号应以 $c-v$ 的速度传播,这个光信号到达地球的时刻为

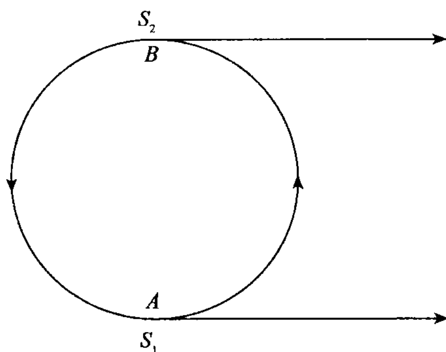


图 1.2.2 双星观测图. S_1 和 S_2 是绕某个公共质心旋转的双星系统;在 A 处,光源 S_1 发射的光束与双星旋转的方向相同,在 B 处,光源 S_2 发射的光束与双星旋转的方向相反

$$t_1'' = t_1 + T + \frac{L}{c-v} \tag{1.2.8}$$

由方程(1.2.7)和方程(1.2.8)可以求得,相对于地球上的观测者来说,S_1 星在双星轨道中运动的半周期是

$$T_1' = t_1'' - t_1' = T + \tau \tag{1.2.9}$$

其中

$$\tau = \frac{L}{c-v} - \frac{L}{c+v} = \frac{2vL}{c^2 - v^2} \approx \frac{2vL}{c^2} \tag{1.2.10}$$

现在考察另一颗星 S_2。假定在 t_2 时刻它在 B 点(见图 1.2.2),其切向速度背离地球,类似于 S_1 星的情况,在地球上接收到这颗星

于 B 点射向地球的光到达地球的时刻为

$$t_2' = t_2 + \frac{L}{c - v} \tag{1.2.11}$$

同样, S_2 到达 A 点的时刻是 $t_2 + T$,此时它发出的光到达地球的时刻应是

$$t_2'' = t_2 + T + \frac{L}{c + v} \tag{1.2.12}$$

所以,对地球上的观察者来说, S_2 在双星轨道中运动的半周期是

$$T_2' = t_2'' - t_2' = T - \tau \tag{1.2.13}$$

其中 τ 由方程(1.2.10)给出。

方程(1.2.9)和方程(1.2.13)表明,如果光速与光源的速度是相加的(弹射说),那么,地球上的观测者就会发现双星的一个成员的半周期是 $T+\tau$,而另一个的半周期是 $T-\tau$,两颗星的半周期之差 2τ 正比于 L,但实际观测结果与此不符(De Sitter,1913a,b)。

放弃弹射说就意味着接受如下的结论:光速与光源的运动状态无关。这个结论在当时已得到双星实验的支持。但要找到更多的实验证据是很困难的(当然,狭义相对论创立之后,出现了不少新的证据)。

实际上,光速恒定原理包括两个内容:一是在惯性系(或真空)中,静止光源发射的光的速度为一普适常量 c;二是光速与光源的运动状态无关。简单地说,在惯性系(或真空)中,无论光源是处于静止状态还是运动状态,所发出的光的传播速度是恒定值。

1.2.2 相对性原理与狭义相对论

早在1589年,伽利略就提出了相对性原理:对于作相互匀速直线运动的任意两个参考系 K 和 K' 来说,无论在哪个参考系中考察,物理学规律完全相同。由于在当时,尚不存在电磁学,因此,后人把伽利略相对性原理局限于力学体系。直到1904年,彭加勒(Poincáre)在一次科学报告会上提出,相对性原理应该对整个物理学都有效(彭加勒,2003,原作中译本)。紧接着,爱因斯坦(Einstein,1905)在他的著名论文“论运动物体的电动力学”中提出了两条假

设:光速恒定假设和狭义相对性假设。根据这两条假设,爱因斯坦对时间观念进行了重新分析诠释,推演出了洛伦兹(Lorentz)变换(详见第2章),而整个狭义相对论均以洛伦兹变换为基础。比如,根据洛伦兹变换,可以推论出运动时钟变慢、运动量杆收缩、同时性的相对性、横向多普勒频移等一系列相对论效应。

1.2.3 牛顿引力理论与等效原理

牛顿在其名著《自然哲学的数学原理》一书中把引力定义为(Newton,1687;牛顿,1992,中译本)"按其所包含的物质数量,向各方传播到无限远,并总是与距离的平方成反比减小。"用数学形式表达就是

$$\boldsymbol{F} = m\frac{GM}{r^3}\boldsymbol{r} \tag{1.2.14}$$

其中,G是引力常数,M是中心天体质量,$\boldsymbol{r}$是质量为m的物体至中心天体的矢径,其模量记为r。通常用$\boldsymbol{g}$来表示$\frac{GM}{r^3}\boldsymbol{r}$,于是有

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{g} \tag{1.2.15}$$

但牛顿十分清楚,引力定律中出现的质量m与牛顿第二运动定律

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} \tag{1.2.16}$$

中出现的m可能并不相等,其中$\boldsymbol{a}$是在力$\boldsymbol{F}$的作用下物体所获得的加速度。为此,就有了"引力质量"与"惯性质量"之分。将引力定律中出现的质量规定为引力质量m_G,将牛顿第二定律中出现的质量规定为惯性质量m_I,上述两式可表示为

$$\boldsymbol{F} = m_G\boldsymbol{g} \tag{1.2.17}$$

$$\boldsymbol{F} = m_I\boldsymbol{a} \tag{1.2.18}$$

假定有一质点m处于引力场$\boldsymbol{g}$中,它受到的力(引力)由方程(1.2.17)给出。在这个力的作用下,它的运动规律由牛顿第二定律(1.2.18)给出。于是

$$m_I\boldsymbol{a} = m_G\boldsymbol{g} \tag{1.2.19}$$

或

$$a = \frac{m_G}{m_I} g \tag{1.2.20}$$

如果 m_G 与 m_I 的比值不是恒定的,那么,对于由不同质料构成的物体,其加速度将有所不同。牛顿对此做了实验,其结果表明在 10^{-3} 的精度范围内没有差别。贝塞尔(Bessel)于 1830 年更精确地证实了这个结果(m_G/m_I的差别不大于 2×10^{-5})。1889 年,奥特瓦斯(Eötvös)成功地证明了,对于各种不同的物质,m_G/m_I 的差别不大于 10^{-9}。近代,又有不少学者(Dick and Strayer,1984;Dabbs et al.,1965;Witteborn and Fairbank,1967;Braginsky and Panov,1972;Adelberger et al., 1990; Nobili et al., 2000; Lockerbie, 2000; Nordtvedt, 2000; Mester et al., 2001;Blaser,2001;Touboul et al., 2001;Worden et al., 2001;Pradels and Touboul,2003;Trenkel and Speake,2003;岳英,2005)对引力质量与惯性质量是否相等的问题进行了实验检验,其结果表明在 $10^{-11}\sim10^{-12}$的精度水平上看不出 m_G/m_I的变化,参见表 1.2.1。

上述实验在一定的精度水平上验证了引力质量与惯性质量的等效性(即验证了一切粒子均以相同的加速度下落)。因此,已有充分的理由认为,引力质量与惯性质量相等。这就是通常所说的"等效原理"。等效原理的发现应当归功于伽利略。他通过著名的思想实验、比萨斜塔实验以及光滑斜板实验证实了落体的速率与其质量无关,摆脱了亚里士多德的论断(重物体比轻物体下落得快一些)长达一千八百多年的统治,尽管伽利略当时并没有意识到引力质量与惯性质量之间的区别。这里需要指出,伽利略当初很有可能只进行了思想实验(Hawking,1990),因为通过简单的推理即可证明,亚里士多德的论断是错误的;而且,只有当所有物体的下落速度相同时才能得到理性推理的一致性(申文斌,2005),其推理过程非常简明:设想将两个物体捆绑在一起,分别考察每一个物体的下落速度和捆绑在一起的物体的下落速度;利用反证法即可证明,任何物体在任意固定的时刻都应具有相同的下落速度。看起来,一个物体的引力质量必定与惯性质量相等,或者它们具有恒定的比例系数。不过,我们还不能作最终断言,因为,如果仅仅惯性质量(而不是引力质量)随着运动速度的增加而增大(申文斌,1994),那么,伽利略的结论仍然成

立,但等效原理不一定能成立。为此,科学家一直在进行检验等效原理的实验。促使我们产生这一想法(即等效原理有可能失效)的原因如下:真空不空,在现实中不存在无物质的绝对真空,因而(有物理意义的)空间对运动粒子应该有阻碍,致使惯性质量随运动速度的增加而增大(注意惯性质量由牛顿第二定律定义),但运动速度并不影响引力质量。若果真如此,我们又回到了"推广的"亚里士多德的断言:在同等体积的前提下,较重的物体下落得快一些。

牛顿的引力理论可以解释众多的自然现象(Newton,1687),特别是在解释地月系统以及天体运动规律方面取得了一系列辉煌的成功。基于牛顿引力理论,康德提出了潮汐摩擦概念(Kant,1754),成功地解释了月球轨道的逐渐扩张。牛顿引力理论还预言了海王星的存在并得到了天文观测的证实。然而,在牛顿引力理论取得辉煌成功的同时,天文观测发现了难以用牛顿引力理论解释的现象。Le-Verrier 于 1859 年通过观测和计算发现,水星近日点的实际进动(即水星轨道面的缓慢转动)比按照牛顿理论从其他行星的已知摄动中预期的值每百年快大约 43″(Newcomb,1882)。尽管后来有人利用黄道光模型(即由位于接近太阳黄道面上的物质造成黄道光的模型)可以解释水星近日点的剩余进动(Rosser,1971),但天体物理学的研究表明,并不存在足够的星际物质可以解释所观测到的水星剩余进动。这表明,或者还存在某种非引力的东西,或者牛顿引力理论只是近似成立。不过,近年出现了暗物质假设(李宗伟,2000;Navarro et al., 1996):宇宙中的大部分物质(预计 80% 左右)是看不到的。如果这一假设成立,那么,大部分甚至全部物理学定律都将受到新的挑战。

表 1.2.1　检验引力质量与惯性质量等效的实验结果(引自岳英,2005)

年代	研究者	精度	方法
~1686	Newton	10^{-3}	单摆
~1832	Bessel	2×10^{-5}	单摆
~1910	Southerns	5×10^{-6}	单摆

续表

年代	研究者	灵敏度	方法
~1922	Eötvös et al	5×10^{-9}	扭称
~1923	Potter	3×10^{-6}	单摆
~1935	Renner	2×10^{-9}	扭称
~1964	Dick et al	3×10^{-11}	扭称
~1972	Braginsky et al	10^{-12}	扭称
~1976	Shapiro et al	10^{-12}	激光测距
~1979	Keiser and Faller	4×10^{-11}	液体
~1987	Niebauler et al	10^{-10}	自由落体
~1989	Heckel et al	10^{-11}	扭称

1.2.4 非欧几何

欧几里得几何的基础是5条公设。在1.1.1节已经指出，欧几里得几何学体系是由5条公设演绎出来的。前4条公设似乎是不证自明的，唯有第5条公设不如前4条明显。两千多年来，为了纯化欧几里得体系，几何学家们一直试图证明第5条公设是多余的，但结果总是以失败而告终。实际上，欲证明第5条公设是其他4条公设的逻辑推演结果是不可能的，因为存在这样的非欧几何，它满足欧几里得几何的前4条公设，但不满足第5条公设，如黎曼(Riemann)几何。这表明，第5条公设不可能由前4条公设导出，否则，包容了前4条公设的非欧几何又必须包容第5条公设，这是矛盾的。近代，有人(郑铨，1989)声称证明了欧几里得第5条公设可以由前4条公设导出。但根据前面的推理，这是不可能的。

非欧几何最先由高斯(Gauss，1824)、罗巴切夫斯基(Lobachevski，1826)以及Bolyai(1832)各自独立地发现(Weinberg，1972)。他们发现了二维负常曲率空间，在这种空间里通过给定点可以作无限多条直线平行于任意一条事先给定的直线。但在欧几里得空间中，第五条公设的一个等价表述是：通过任一给定点只能作一条直线平行

于一给定直线(Weinberg,1972)。高斯(1827)区分了曲面的内在性质(即与高维空间无关)与外在性质(即它在较高维空间中的嵌入),并认识到,曲面的内在性质具有本质性的意义,而描述曲面的内在性质主要靠度规函数。高斯的巨大贡献是挑选出了一类特殊的度规函数空间(Weinberg,1972),它不仅包括了高斯、Bolyai 和 Lobachevski 空间,而且还包括了通常的曲面。高斯假定:在空间任一足够小的区域内部能找到一个局部欧几里得坐标系 ξ_1, ξ_2,使得在坐标为 (ξ_1,ξ_2) 与 $(\xi_1+\mathrm{d}\xi_1,\ \xi_2+\mathrm{d}\xi_2)$ 的两点之间的距离 $\mathrm{d}s$ 满足毕达哥拉斯定理

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\xi_1^2 + \mathrm{d}\xi_2^2 \tag{1.2.21}$$

如果我们选定任意其他坐标系 (x_1,x_2),而 (ξ_1,ξ_2) 与 (x_1,x_2) 之间由函数关系

$$\xi_1 = \xi_1(x_1,x_2),\qquad \xi_2 = \xi_2(x_1,x_2) \tag{1.2.22}$$

联系,那么,不难算出,(x_1,x_2) 与 $(x_1+\mathrm{d}x_1,\ x_2+\mathrm{d}x_2)$ 之间的距离将由下式给出

$$\mathrm{d}s^2 = g_{11}\mathrm{d}x_1^2 + 2g_{12}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 + g_{22}\mathrm{d}x_2^2 \tag{1.2.23}$$

其中

$$g_{11} = \left(\frac{\partial\xi_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\xi_2}{\partial x_1}\right)^2$$

$$g_{12} = \left(\frac{\partial\xi_1}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial\xi_1}{\partial x_2}\right) + \left(\frac{\partial\xi_2}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial\xi_2}{\partial x_2}\right)$$

$$g_{22} = \left(\frac{\partial\xi_1}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial\xi_2}{\partial x_2}\right)^2 \tag{1.2.24}$$

是度规(函数),表征了空间特性,距离 $\mathrm{d}s^2$ 不随参考系的选取而变。这里的概念,与广义相对论中由局部惯性坐标系向一般坐标系中的转换极为类似(见第 3 章)。

把高斯的工作推广到高维(空间维数大于 2)并非易事。此问题在 1854 年由黎曼完全解决。随后,Christoffel, Ricci, Levi-Civita, Beltrami 等人把黎曼的观念发展成完美的数学结构,这在第 3 章中要加以阐述。当爱因斯坦(1905—1916)创立广义相对论时,实际上手边有现成的黎曼几何可供使用。在第 3 章将会看到,将相对论理论解

释为空间几何弯曲理论完全就是黎曼几何的再现(Weinberg,1972)。不过,现实是否如此,尚不能完全断言,需要大量的实验检验。

1.3 相对论大地测量概述

1.3.1 引言

大地测量学的基本任务是以尽可能高的精度测量某个待定的对象(包括基于初始测量数据导出的量),比如两点之间的距离(边长、基线长度等)、角度、点位坐标乃至地球形状、地球重力场(由边界值可确定整个地球外部重力场)、星体位置,等等,并进而对某些感兴趣的现象(特别是地球物理现象)进行科学解释,为地球科学研究以及社会实践提供依据。

自公元前3世纪大地测量活动出现以来,一直受囿于欧几里得空间(几何)概念,受囿于牛顿的绝对时间观,即时间与空间无关的观念,认为时间按其自身的规律均匀地流逝(Newton,1687)。20世纪初期,爱因斯坦创立了狭义相对论(1905)和广义相对论(1913—1916),统称相对论。相对论改变了人们对自然界的看法。时间和空间不再是相互无关的绝对的东西。甚至单独谈论时间和空间都将是无意义的,时间和空间将化为"阴影",只有二者的结合才是现实(Minkowsky,1908,1923)。确切地说,我们所感觉到的时空是一种四维连续空间,单独的一维时间和单独的三维空间是不存在的(Lorentz et al., 1923)。

自相对论创立以来,历经90多年的发展,经受了众多的实验检验,虽然还不能肯定地认为相对论是完美无缺的理论,但由于它的巨大成功,相对论理论已获得普遍承认并已被应用于多种分支学科。大地测量学家已充分认识到(Grafarend,1985),系统地研究相对论大地测量已成为现代大地测量学的紧迫任务。原因有二:一是追求理论的统一和完美,因为经典大地测量理论是建立在欧几里得空间以及牛顿力学理论的基础之上的,而欧几里得平直(三维)空间和牛顿力学理论只是近似正确的;二是随着科学技术的发展,对大地测量的

精度要求越来越高,不考虑相对论影响难以达到所要求的高精度测量。比如,采用 GPS 测量方法定位,欲达到厘米级或毫米级精度,必须考虑相对论效应。

我们的目的是试图基于相对论理论来处理大地测量学的问题,建立相对论大地测量理论框架,因此,本书仅就相对论基础、基于相对论的一些重要结果和实验验证以及相对论重力测量进行讨论,后者是相对论大地测量的一个领域,不是相对论大地测量全面系统的研究和阐述。下面仅简要介绍相对论大地测量相关分支领域的基本概念。

1.3.2　相对论重力测量

大地测量的一个重要任务是确定地球外部重力场。经典的重力场理论以牛顿引力理论为基础。当精度要求高于 $10^{-9}g$(相当于 1μGal 量级,g 是地面重力加速度)时,必须考虑相对论效应。这时,牛顿引力理论被爱因斯坦引力理论所代替。由于爱因斯坦引力场方程极为复杂,难以求解,因此,通常采用后牛顿近似(即相对论引力理论的一级近似或二级近似,其中零级近似就是经典牛顿引力理论)研究重力测量问题(Soffel,1989),取至一阶近似或二阶近似,其精度将优于 $10^{-11}g$,高于或相当于目前超导重力仪所具有的观测精度 $10^{-11} \sim 10^{-12}g$(孙和平,2004;GWR homepage,2007),地面重力加速度典型值约等于 980Gal($1\mathrm{Gal} = \mathrm{cm/s^2}$)。本书第 4 章将专题讨论相对论重力测量问题。

1.3.3　相对论惯性大地测量

在 1.1.3 节已经指出,惯性(大地)测量是利用惯性导航技术快速地获得多种大地测量数据(如经纬度、方位角、重力异常等)的一种技术,其基本原理(如 1.1.3 节所示)是通过惯性元件感受载体在运行过程中的加速度(包括惯性加速度和重力加速度),研究解决大地测量问题。按照广义相对论原理,惯性加速度(力)与引力加速度(力)不可区分。由于任何载体都不可避免地存在加速运动,因此,如何将引力(或重力)与惯性力分离,是获取真正重力数据的关键问

题。不少学者讨论了惯性测量中的相对论效应(Moritz,1978,1985;Moritz and Hofmann-Wellenhof,1993),研究了如何将引力与惯性力分离开的问题,取得了长足进展(Shen,1996;Shen and Moritz,1996a,b,1997;申文斌等,2003,2004a;Shen and Ning,2007)。

1.3.4 相对论参考系

为了描述物质的运动规律,首先需要建立参考系。参考系的基本要素是空间坐标和时间坐标。按经典物理学,空间坐标与时间坐标是相互独立的。但按照相对论,二者是相关联的。正是由于这一相关特性,选用不同的参考系,测量结果将有所不同。比如,同时性的概念是相对的。假定在一个参考系中测定两个事件 A 和 B 是同时发生的,那么,在相对此参考系运动的另一参考系中测定这两个事件,一般说来,它们不会同时发生。因此,在选用参考系时必须特别小心。Moritz(1981)曾讨论了参考系的相对论效应。Fukushima(1989),Brumberg(1989),Ma(1989),Boucher(1989),韩春好(1990)等不少学者详细研究了各类相对论参考系(其中包括在大地测量中应用较广的地心惯性系)以及参考系之间的转换。目前,关于相对论参考系的研究仍在继续。

1.3.5 相对论空间大地测量

空间测量技术(GPS,SLR,VLBI 等)在现代大地测量领域起着主导作用。当测量精度的要求高于 $10^{-8} \sim 10^{-9}$ 量级时,必须考虑相对论效应。信号传播、卫星轨道、守时系统等都将受到相对论效应影响。Harkins(1973)最先提出了多普勒(Doppler)测量中的相对论修正,修正量归因于引力位差对信号传播和时钟运行速率的影响以及信号源与接收机之间的相对运动所带来的影响。在 GPS 以及 VLBI 测量中同样存在上述影响。为此,Ashby(1987)给出了 GPS 测量中的相对论修正模型。Finkelstein et al.(1983)以及 Zhu and Groten(1988)分别给出了 VLBI 测量中的相对论时间延迟模型。基于原子钟的研究(申文斌等,1993),金标仁和申文斌(1994)探讨了相对论性的 VLBI 时间延迟模型(金标仁等,1994)。Chao et al.(1993)探讨

了地球自转轴（简称地轴）的相对论进动效应，其量级（0.02″）比目前监测地轴运动的分辨率（0.001″）大一个数量级，参见（Herring et al., 2002; IGS Central Bureau, 2004; McCarthy and Petit, 2004）。由于地轴的相对论进动效应，春分点要作相应的移动。对此，Yan and Groten（1992）在相对论框架下讨论了春分点的移动问题。随着空间测量技术的发展，有更多的相对论效应（例如导航陀螺的相对论进动效应、空间（卫星）重力测量中相对论效应等）需要考虑。

第 2 章

狭义相对论导引

狭义相对论诞生于由爱因斯坦在 1905 年发表的一篇著名论文《论运动物体的电动力学》(Einstein, 1905),其基础是两个基本假设:光速恒定假设和狭义相对性假设。从本质上来说,狭义相对论是为了解决物理学规律在两个惯性参考系之间的变换问题。正是由于狭义相对论,导致了自然哲学观(特别是时空观)的重大变革。时间膨胀,长度收缩,惯性质量随运动速度而变,质能公式等,都是狭义相对论的基本内容。随着时间的推移,特别是由于闵可夫斯基(Minkowsky, 1908)的卓越研究,狭义相对论被纳入了完美的四维数学表示形式,为爱因斯坦(1915—1916)通向广义相对论开辟了一条道路。需要指出的是,不管后来狭义相对论的形式发展得多么完善,但其基本内容并没有本质变化。

2.1　惯性定律、惯性参考系及伽利略相对性原理

早在二千多年以前,亚里士多德就断言,如果一个物体不受力的作用,它的运动速度就会逐渐减慢(参见中译本,Aristotele, 1982)。显然,这是根据经验最容易得到的结论。但在一千多年以后,伽利略

通过实验以及纯理性的推理得出一个结论(当时被认为是异端邪说):一个物体如果不受外力作用,它将保持匀速直线运动或静止状态,直到外力迫使其改变。这个结论被牛顿归纳为惯性定律(Newton,1687)。实际上,仔细分析就不难发现,如果一个物体不受任何外力作用,那么,它的运动状态就没有理由改变。这就是物理学家普遍接受惯性定律的原因。

为了描述物质世界的运动规律,需要建立参考坐标系。从数学观点来看,参考坐标系的种类很多,可以是直角坐标、球面坐标、曲线坐标、旋转坐标,等等。但物理学家偏爱一种坐标系,在这种坐标系中考察,惯性定律成立。这种坐标系被称为惯性坐标系(简称惯性系)。在惯性系中,不仅惯性定律成立,而且牛顿第二定律 $\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}$ 也成立。惯性定律可以看成是牛顿第二定律的特例,因为速度 $\boldsymbol{v}$ 恒为常数 $\boldsymbol{C}$ 的充分必要条件可以表述为(在牛顿力学体系中,惯性质量 m 是不变量)

$$\boldsymbol{F} = m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{2.1.1}$$

因此,惯性系也可以按如下方式定义:存在一个参考系,若在其中牛顿第二定律成立,则该参考系是惯性系。

在实际应用中,何以知道一个参考系是否为惯性系呢?有两个判据可以采用。其一是考察在此参考系中惯性定律或牛顿第二定律是否成立(比如可通过各种实验检验牛顿第二定律是否成立);其二是考察该参考系与某个已知惯性参考系是否做相对匀速直线运动或相对静止(这时,只需确定该参考系相对已知惯性系的运动速度矢量即可)。在应用第二种判据时,隐含着一个原理:伽利略相对性原理。伽利略相对性原理是指(Galileo, 1898; Weyl, 1970; Rosser, 1971),与任何一个惯性系作相对匀速直线运动的参考系也是惯性参考系。由于在任意惯性系中牛顿第二定律成立,因此伽利略相对性原理也可换一种方式表述:假定 K 为惯性系,K' 相对 K 做匀速直线运动,则 K' 为惯性系,且牛顿第二定律在 K' 中也成立。

伽利略总结出上述原理的基础可以从下面的一段话中得到启示。他写道(Galileo,1898;Rosser,1971):

> 当你乘坐匀速运动的轮船时，你在船舱内向船头方向跳一段距离所花费的力气，并不比你向船尾方向跳过相同距离所花费的力气更大；当一物品从你手中脱落，将竖直地落到甲板上，而不发生偏斜……

总括起来看，伽利略认为，不论什么事件只要是力学过程，那么，不论是在匀速运动的船上，还是在静止的陆地上，它们的运动规律完全相同。显然，这里必须假定不存在空气阻力的影响。

现在要问，一个力学规律，在 K 系中已建立相应的运动方程，怎样在 K'系中来描述呢？伽利略找到了一种变换，即伽利略变换

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{v}t \\ t' = t \end{cases} \tag{2.1.2}$$

其中，$\boldsymbol{x}$、t 分别是 K 系中的空间和时间坐标，$\boldsymbol{x}'$、t'分别是 K'系中的空间和时间坐标，$\boldsymbol{v}$ 是 K'系中的坐标原点在 K 系中的运动速度（恒定）。

实际上，为了度量空间坐标，需要长度标尺；为了度量时间坐标，需要时间标尺。伽利略变换隐含了这样的假定：空间标尺和时间标尺在任何惯性系中都是相同的。在爱因斯坦之前，空间标尺和时间标尺被认为是恒定量（标量），与参考系的选取无关。

可以证明，牛顿力学定律在伽利略变换（2.1.2）之下保持不变。比如，考察牛顿第二定律

$$\boldsymbol{F} = m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t^2} \tag{2.1.3}$$

将方程（2.1.2）代入方程（2.1.3），注意到 $\boldsymbol{v}$ 是常矢，得

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F} &= m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{x} = m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t'^2}(\boldsymbol{x}' + \boldsymbol{v}t') \\ &= m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}'}{\mathrm{d}t'} + \boldsymbol{v}\right) \\ &= m'\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{x}'}{\mathrm{d}t'^2} = \boldsymbol{F}' \end{aligned} \tag{2.1.4}$$

这表明，牛顿第二定律在伽利略变换之下保持不变。这里需要指出，

在经典力学中，惯性质量 m 被当作标量(即恒定量)，因此 $m' = m$。

2.2 两个基本假设

19 世纪，电磁学理论开始兴起，特别是由于麦克斯韦的卓越研究，把电与磁统一了起来，建立了麦克斯韦方程。同时，麦克斯韦还引入了场的概念，认为电磁相互作用是靠场来传递的。在没有物质的空间(真空)中，麦克斯韦方程可简化为一组波动方程，波的传播速度即电磁波的传播速度。麦克斯韦预言，光是一种电磁波。这一预言被赫兹(Hertz，1857—1894)实验所证实。

真空中电磁波的特点是，不论电磁波是由什么性质的场源所产生的，电磁波的传播速度始终恒定。因此，光在真空中的传播速度是恒定的。若选取一个相对真空静止的惯性参考系 K，那么，在这个参考系中，光速恒定，光速值记为 c，其大小约为 3×10^5km/s。现在选取一个相对 K 作匀速直线运动的参考系 K'，根据 2.1 节的讨论，K' 是惯性参考系。在 K 系中，光速恒定。但在 K' 系中考察，若采用伽利略变换，光速就不是恒定的，沿不同的方向，光速值不同(见后面的方程(2.2.3))。在当时，由于牛顿力学和伽利略变换在物理学家心目中是不可动摇的，因此，只好假设，麦克斯韦方程只在相对真空静止的参考系 K 中成立。这样一来，物理学家就不得不假定，真空充满了以太，麦克斯韦方程组仅在相对以太静止的参考系中成立，电磁波是靠以太这种媒介来传播的。这就意味着，伽利略相对性原理仅适用于牛顿力学规律，不能简单地应用到电磁学领域。可以设想，如果没有以太，真空是一种不存在任何物质形式的空间，那么，它就只是一种数学形式空间。这时，由于两个惯性参考系 K 和 K' 必定完全等价(申文斌，1994)，麦克斯韦方程组就应该在两个参考系中都成立，除非它不是对自然的一种真实描述。

为了寻求相对以太静止的参考系，物理学家着手用实验检测地球相对于以太的运动速度。早在 1810 年，Arago 就试图通过实验检测地球相对于以太的速度，但没有成功，即给出了零结果(参见 Ferraro and Sforza，2005)。如 1.2.1 节所述，著名的迈克尔逊-莫雷实验

也给出了零结果,即没有检测出地球相对于以太的运动。但由此并不能肯定地断言以太不存在,因为还有一种可能,那就是司托克斯的以太拖曳说。司托克斯曾经提出了一个假说(Stokes,1845):以太像果子冻之类的东西,地球在以太中穿行时带动地球附近的以太随地球一起运动;离开地球越远被地球拖曳的量越少。司托克斯当初是为了解释光行差现象(见后)以及 Fresnel(1818)的以太拖曳理论(参见 Nascimento,1998)提出这一假说的。于是,按司托克斯拖曳说,迈克尔逊-莫雷实验必定给出零结果。然而,司托克斯的拖曳说遇到了一个困难,难以解释 Lodge(1897)的双盘转动实验。按照 Lodge 实验,如果运动物体拖曳以太,那么,双盘转动实验应该给出非零结果(Rosser,1971;申文斌,1994)。Lodge 实验的基本原理就是考察位于两个圆盘之间的两束反向光在圆盘转动之前和转动之后的干涉条纹移动,但实验没有发现这种移动。

爱因斯坦认为(Einstein,1905),任何检验地球相对于以太运动的实验都是徒劳的,因为以太根本不存在。如果以太真不存在,那么,我们就没有任何理由认为,麦克斯韦方程在 K 系中成立而在 K' 系中不成立。在 K 系中由麦克斯韦方程可以推论出光速恒定,与光源的运动状态无关;在 K'系中,也可以推论出光速恒定,与光源的运动状态无关(前面已经指出,无论电磁波起源于什么物质,真空中电磁波的传播速度是恒定的)。但 K 系中的光速 c 与 K'系中的光速 c' 是否相同呢?按照伽利略变换,二者是不同的。这一点很容易验证。由伽利略变换(2.1.2)可以导出速度变换公式

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}'}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} - \boldsymbol{v} \tag{2.2.1}$$

即

$$\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} \tag{2.2.2}$$

其中, $\boldsymbol{u} = \mathrm{d}\boldsymbol{x}/\mathrm{d}t$ 和 $\boldsymbol{u}' = \mathrm{d}\boldsymbol{x}'/\mathrm{d}t'$分别是运动粒子在 K 和 K'中的运动速度,这里用到了 $t' = t$。将方程(2.2.2)应用于光速,则有

$$\boldsymbol{c}' = \boldsymbol{c} - \boldsymbol{v} \tag{2.2.3}$$

根据方程(2.2.3),光速在 K'系中不再是恒定值:沿不同的方向,光速具有不同的值。但我们又没有任何理由认为,麦克斯韦方程只在

K 系中成立而在 K'系中不成立。为了消除这一困境，有一种方案就是放弃伽利略变换，假定光速在任何惯性系中是普适恒定值，如同 $\pi = 3.14159\cdots$。这就是 Einstein(1905)当初提出的第一条假设：光速恒定假设。

既然麦克斯韦方程不仅在惯性系 K 中成立，而且也应该在相对 K 做匀速直线运动的参考系 K'中成立，那么，一个自然的推想就是，伽利略相对性原理也应该适合于麦克斯韦方程。为此，Einstein(1905)提出了第二条假设：无论在哪种惯性参考系中考察，物理体系状态变化所遵循的规律保持不变。这一假设称为狭义相对性假设。实际上，光速不变假设和狭义相对性假设早在 1904 年就由彭加勒指出了(参见 1.2.2 节)，可惜他没有以此为基础作进一步的推演(参见后面的 2.3.1 节)。

2.3 洛伦兹变换及推论

2.3.1 洛伦兹变换

建立两个笛卡尔惯性坐标系 K 和 K'，其时空坐标分别由(t,x,y,z)和(t',x',y',z')标记。为简单起见，假定两个坐标系 K 和 K'的相应坐标轴互相平行，并且，K'相对 K 沿 Ox 方向以匀速率 v 运动，而在 Oy 和 Oz 方向没有相对运动(参见图 2.3.1)。下面我们研究如何根据两条基本假设(光速恒定假设和狭义相对性假设，参见 2.2 节)推导出洛伦兹变换(Einstein，1905；Bergmann，1958；曹昌祺，1961；Rosser，1971；郭硕鸿，1979；强元棨，2003)。

假定 $t=0$ 时 K 系的原点 O 与 K'系的原点 O'重合。根据前面坐标系的选取，这时，Ox 轴与 $O'x'$轴重合。假定有一运动质点处于 K 系的时空坐标为(t,x,y,z)，那么，由于整个 K'系沿 Ox 正向有一运动速度 v，在 K 系中的一"标准量杆"L 和"标准时间"间隔 Δt 在 K'系中可能有变化。由于 K'系在 Oy 和 Oz 方向没有相对运动，因此，在这两个方向不存在使量杆发生变化的原因。这一论断基于直观的经验感觉，或基于因果律，难以严格论证。实际上，任何物理学定律都是

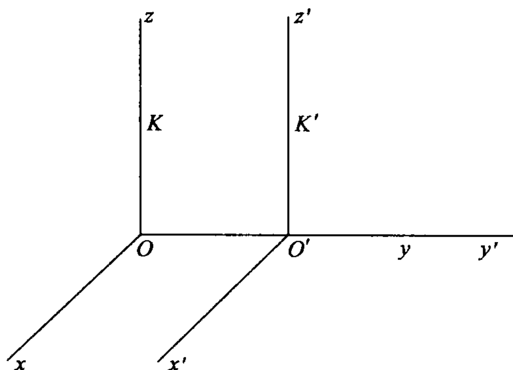


图 2.3.1　两个惯性坐标系 . $K(O-xyz)$ 和 $K'(O'-x'y'z')$ 的 x 和 x' 轴始终重合，二者的相对速率是恒定值 v

在实验（包括实际实验和思想实验）或经验感觉的基础上经过抽象提升而得到的，从亚里士多德到伽利略，从牛顿到爱因斯坦，均是如此。但无论如何，最终需要回到实验检验。如果我们接受因果律，那么，在 Oy 和 Oz 方向就没有使量杆发生变化的原因。这就意味着在 Oy 和 Oz 方向 y 和 z 坐标具有如下变换性质：

$$y' = y \tag{2.3.1a}$$

$$z' = z \tag{2.3.1b}$$

沿 Ox 方向，我们假定一待定的收缩（或放大）因子 α，则有

$$x' = \alpha(x - vt) \tag{2.3.2}$$

如果因子 $\alpha = 1$，则回到了伽利略变换(2.1.2)。

下面再研究时间的变换特性。无论在 K 系还是 K' 系考察，时间必须均匀变化，这里隐含了如下的推理：既然 K 和 K' 均为惯性系，也可将它们视为惯性空间；惯性空间 K 或 K' 必定是均匀空间，在均匀空间中，任意两个相同的邻域中的物理学参数（包括时间参数）将保持一致。因此，t' 必须是 (t,x,y,z) 的线性函数，即有

$$t' = \beta x + \lambda_1 y + \lambda_2 z + \gamma t \tag{2.3.3}$$

其中，$\beta, \lambda_1, \lambda_2$ 和 γ 是待定因子，它们与时空坐标无关。将方程(2.3.1)代入方程(2.3.3)就会发现，如果 $\lambda_1 y + \lambda_2 z = \lambda_1 y' + \lambda_2 z'$ 不为

零,那么,K'系的时间流逝就与坐标 y'和 z'有关了,这与前面的推理矛盾,实际上也违背狭义相对性假设:在两个惯性系 K 和 K'中,关于时间的定义应该是相同的。根据时间的基本概念,在任意一个惯性参考系中,时间的流逝速率与其自身参考系的空间坐标无关(但有可能与其他参考系的空间坐标有关)。于是,$\lambda_1 y+\lambda_2 z$ 必须为零。由于 y 和 z 是任意的,因此,λ_1 和 λ_2 必须为零。这时,方程(2.3.3)简化为如下方程

$$t' = \beta x + \gamma t \tag{2.3.4}$$

假定方程(2.3.1)、(2.3.2)和方程(2.3.4)是所寻求的坐标变换,为了确定待定系数 α、β 和 γ,我们来考察光波球面。假定 $t=0$ 时(这时 $t'=0$, O 与 O'重合)在 O 点有一球面电磁波向四周传播,根据光速恒定假设,下面两个球面波方程同时成立:

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \tag{2.3.5}$$

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2 \tag{2.3.6}$$

将方程(2.3.1)、(2.3.2)和方程(2.3.4)代入方程(2.3.6),得

$$\alpha^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2 = c^2(\beta x + \gamma t)^2 \tag{2.3.7}$$

或写成

$$(\alpha^2 - c^2\beta^2)x^2 + y^2 + z^2 - 2(v\alpha^2 + c^2\beta\gamma)xt = (c^2\gamma^2 - v^2\alpha^2)t^2 \tag{2.3.8}$$

根据狭义相对性假设,方程(2.3.8)应该完全等同于方程(2.3.5)。由于(t,x,y,z)任意,因此,比较二者的同类项系数,可得

$$\left.\begin{aligned} &\alpha^2 - c^2\beta^2 = 1 \\ &v\alpha^2 + c^2\beta\gamma = 0 \\ &c^2\gamma^2 - v^2\alpha^2 = c^2 \end{aligned}\right\} \tag{2.3.9a}$$

解上述方程组,取有意义的解,得

$$\left.\begin{aligned} &\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \\ &\beta = -\frac{\gamma v}{c^2} \\ &\alpha = \gamma \end{aligned}\right\} \tag{2.3.9b}$$

将方程(2.3.9b)代入方程(2.3.2)和(2.3.4),并将方程(2.3.

1）合写在一起，便得到了不同于伽利略变换的新的变换方程

$$\left.\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \end{aligned}\right\} \tag{2.3.10}$$

变换方程（2.3.10）称为洛伦兹变换，它是由洛伦兹（Lorentz，1895）在研究电子的各种运动学效应（如运动电子的尺度收缩，质量增大等）时基于完全不同于爱因斯坦的思路提出的。洛伦兹当时提出洛伦兹变换纯粹是为了解释某些特殊的自然现象，他并不认为洛伦兹变换具有新的物理内容，更不认为会改变时空观。爱因斯坦则不同，他认为洛伦兹变换代表了某种物理学原理，具有新的物理内容，从而对自然哲学观产生了重大影响。

2.3.2　时间膨胀及双生子佯谬

假定有一事件，在 K 系中（x,y,z）处发生，延续了 Δt 时间，保持在 K 系中的位置不动。这时，空间坐标分量 x、y、z 均为常数（$\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0$）。由洛伦兹变换方程（2.3.10）之第四式可以得到

$$\Delta t' = \gamma \Delta t = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \tag{2.3.11}$$

上式表明，若相对某事件静止的时钟（在 K 系中）记录到的该事件延续的时间为 Δt，那么，对于相对该事件以速度 v 运动的时钟（在 K' 系中）来说，记录到的结果将由方程（2.3.11）给出：时间膨胀了，因为因子 $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ 总是小于 1。反过来看，K' 系观测者记录到上述事件（该事件对 K' 系观测者来说以速度 $-v$ 运动）的时间延续为 $\Delta t'$，但随同事件一起运动的时钟（在 K 系中）记录到的时间延续为

$$\Delta t = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\Delta t' \tag{2.3.12}$$

这表明，随同事件一起运动的时钟记录到的该事件的延续过程要短一些。这就是通常所说的飞行时钟变慢效应。这里必须注意，说飞

行时钟变慢，是指有一处于匀速运动的事件 P，附着在 P 上的时钟（因而该时钟也随 P 一起运动）所记录到的该事件的延续时间要比“静止”时钟（即考察运动事件 P 的静止观测者所携带的时钟）记录到的该事件的延续时间短。

历史上最先检验时间膨胀的一类实验是考察飞行介子（比如 π 介子、μ 介子等）的寿命。根据方程(2.3.11)，飞行介子的寿命应该按因子 $\gamma=\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ 增长。

宇宙射线中的 μ 介子，一般是由初级宇宙射线在 10～20km 的高空大气层中与质子相互作用产生的 π 介子衰变（$\pi\rightarrow\mu$）而来的（王正行，1995）。实验物理学家发现，这些衰变的 μ 介子有很大一部分可以到达海平面。一般说来，静止 μ 介子的固有寿命是 $\tau_0=2.2\times10^{-6}$s。如果认为 μ 介子飞行时仍然是这一寿命，那么，μ 介子的飞行速度将远远超过光速。但基本粒子的各种实验还没有提供任何证据表明有超光速粒子存在。因此，一种可能的解释就是认为飞行 μ 介子的寿命按因子 γ 增长。Rossi and Hall (1941) 以及 Frisch and Smith(1963) 进行了此类实验，结果在 10^{-2} 的精度水平上与狭义相对论相符。

另外，有不少实验物理学家测定了由加速器产生的各类介子的寿命。Lederman et al. (1951) 测定了由加速器产生的飞行 π^- 介子的衰变寿命，Durbin et al. (1952)、Greenberg et al. (1969)、Ayres et al. (1971) 均测定了 $\pi^\pm$ 介子的衰变寿命，Farley et al. (1968) 测定了飞行 μ^- 介子的衰变寿命，Burrowes et al. (1959) 测定了 $K^\pm$ 介子的衰变寿命，结果在精度为 5% 到 0.4% 的水平上与狭义相对论预言相符。

尽管可以认为上述实验支持时间膨胀公式(2.3.11)，但还不能因此认为上述实验结果只能有一种解释。或许，飞行介子的寿命增长是由于飞行介子与空间粒子（比如空气粒子或真空中粒子）产生碰撞从而产生次级生成介子的缘故。当然，这只是一种猜想。促使我们有这一猜想的原因是：由飞行的时钟变慢这一结论，将导致一个著名的佯谬——双生子佯谬（也称时钟佯谬）。

设想有一对双生子 A 和 B,B 静止不动,A 以匀速度 v 飞离 B,然后再返回到 B 处。在 B 看来,A 所携带的时钟记录到的这一过程所延续的时间,要比 B 处时钟记录到的这一过程所延续的时间短。因此,在这一过程完结之后,B 认为 A 要比自己年轻一些。但按照狭义相对性假设,运动完全是相对的,在 A 看来,B 经历了类似于前述的运动过程。因此,在这一过程完结之后,A 认为 B 要比自己年轻一些。问题是,究竟谁更年轻?

Möller(1972)以及 Rosser(1971)等人曾详尽地讨论了这个问题。梁灿彬和周彬(2006)指出,双生子佯谬只是人们的误解,实际上根本不存在,并以环球飞行钟实验(Hafele and Keating,1972a,b)作为有力证据。然而,Hafele and Keating 的环球飞行钟实验有不少可疑之点(Shen et al., 2006),难以作为"不存在双生子佯谬(悖论)"的证据。仔细推敲不难发现,试图在相对论框架中解答这个问题是不可能的(申文斌,1994)。

2.3.3　长度收缩

假定有一标准长度 L 置于 K 系中的 Ox 轴上,两个端点坐标为 x_1 和 x_2。对于 K'系的观测者来说,这两个事件(两个端点)在 K'系中分别位于(t'_1,x'_1,y'_1,z'_1)和(t'_2,x'_2,y'_2,z'_2)。为了保证在 K'系中的度量有意义,必须满足条件 $t'_2=t'_1$。于是,由洛伦兹变换(2.3.10)的逆变换得

$$L = x_2 - x_1 = \gamma(x'_2 - x'_1) = \gamma L' \qquad (2.3.13)$$

或写成

$$L' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, L \qquad (2.3.14)$$

上式表明,(在 K'系考察)对于一个飞行的量杆 L'来说,相比于静止量杆 L 按因子$\sqrt{1-v^2/c^2}$收缩。这就是说,飞行量杆的尺度沿运动方向缩短了。

现在要问:长度收缩效应是一种"表观"观象呢,还是一种真实的物理效应? Varičak(1911)认为,长度收缩只是一种表观收缩,它是由于我们的时空测量所引起的,并不对应真实的物理效应。实际

上，类似于时钟佯谬，我们也可以推论出量杆佯谬。设有两个量杆 A 和 B，它们具有相同的静止长度。A 离开 B 以速度 v 飞行。在 B 看来，A 要短一些；但在 A 看来，B 又应该短一些。究竟哪个量杆更短？此即量杆佯谬。该佯谬在狭义相对论框架中是无法解决的。由量杆佯谬还可推论出车库佯谬（梁灿彬，周彬，2006）：在汽车进车库之前，司机和"车库"会得出不同的判断。

泡利（Pauli，1958）认为，长度收缩是一种可观察的物理效应。他援引了爱因斯坦的理想实验（Einstein，1911），指出："长度收缩所必须的、测定空间上相互隔开的两个事件的同时性，可以完全借助于量杆来完成，而无须用时钟。"设想采用具有相同静止长度 l_0 的两根量杆 A_1A_2 和 B_1B_2（沿 x_1 轴放置，量杆标记次序沿 x_1 轴正向由 1 到 2），它们等速反向在 K 中运动（假定量杆 A_1A_2 和 B_1B_2 分别沿 x_1 轴的正向和反向飞行，并假设在最初时刻，A_1A_2 位于 B_1B_2 的左侧）。当 A_1 与 B_1、A_2 与 B_2 分别重合时，在 K 中标出这两点并记为 C_1 和 C_2。当用 K 系中静止的量杆 l_0 量度 C_1C_2 的长度时，其值为

$$l = l_0\sqrt{1-\beta^2} \qquad (\beta = v/c) \tag{2.3.15}$$

泡利由此推论（Pauli，1958），长度收缩不是单独一根量杆所测量出的性质，而是两根彼此做相互匀速运动的相同的量杆之间的倒易关系，这种关系原则上是可以观察的。

看来，目前要对"长度收缩究竟是表观现象还是真实效应"这一问题作出决定性的断言还为时过早，因为时至今日，尚没有任何实验能够检验长度收缩效应。

2.3.4 事件次序

按照伽利略变换，时间是绝对的，它与参考系的选取无关。牛顿在《自然哲学的数学原理》一书中写道（Newton，1687），"绝对的、真正的和数学的时间，按其本性独立地均匀流逝，不受任何外界事物的影响"。牛顿的绝对时间观一直延续到 1905 年。按照绝对时间观，众多事件发生的先后次序是绝对的，与观测者在哪个参考系考察没有任何关系。爱因斯坦则认为（Einstein，1905），时间是相对的，事件发生的先后次序也不是绝对的。第一个论断已经根据洛伦兹变换在

前面指出(即运动时钟变慢)。下面根据洛伦兹变换方程(2.3.10)论证第二个论断。

假定在 K 系的 Ox 轴上有两个事件 P_1 和 P_2 同时发生(在 K 系看来同时发生),P_1 和 P_2 的空间坐标分别为$(x_1,0,0)$和$(x_2,0,0)$。假定这两个事件发生的时刻为 t(在 K 系考察)。对于 K'系的观测者来说会有什么断言呢?根据洛伦兹变换(2.3.10),在 K'系中考察,这两个事件发生的时刻分别为

$$t_1' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x_1\right)$$

$$t_2' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x_2\right) \tag{2.3.16}$$

由此得

$$t_2' - t_1' = -\frac{v\gamma}{c^2}(x_2 - x_1) \tag{2.3.17}$$

若假定 $x_2 > x_1$,那么,方程(2.3.17)表明,在 K 系看来同时发生的两个事件 P_1 和 P_2,在 K'系看来,这两个事件不是同时发生的,P_2 先于 P_1 发生。当 $x_1 = x_2$ 时,$t_2' = t_1'$。这时,在两个参考系考察所得结论是一致的:P_1 和 P_2 同时发生。更广义地,可以假定 P_1 和 P_2 在 K 系中分别位于$(x_1,0,0)$和$(x_2,0,0)$,发生的时刻分别为 t_1 和 t_2。这时,方程(2.3.17)由下式代替

$$t_2' - t_1' = \gamma(t_2 - t_1) - \frac{v\gamma}{c^2}(x_2 - x_1) \tag{2.3.18}$$

我们先假定 $t_1 < t_2$,$x_1 < x_2$。这表明,在 K 系考察,对于处于两个不同地点的事件 P_1 和 P_2,P_1 先于 P_2 发生(因为 $t_1 < t_2$)。为了使这两个事件的发生次序在 K'系中考察正好倒转过来,只需令

$$\gamma(t_2 - t_1) < \frac{v\gamma}{c^2}(x_2 - x_1) \tag{2.3.19}$$

即(因 γ 为正数)

$$(t_2 - t_1) < \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1) \tag{2.3.20}$$

只要不等式(2.3.20)成立,那么,在 K'系中考察,P_1 和 P_2 的先后次序就倒转了:P_2 先于 P_1 发生。实际上,当 $t_2 - t_1$ 不很大,而两个事

件之间的距离 $x_2 - x_1$ 很大时，就可以使不等式(2.3.20)成立。

把上述结论加以推广，我们就得到了如下的论断(相对论观点)：

设有 n 个事件 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 在自然界中发生，在 K 系考察，它们的先后排列次序为

$(A): P_1 \to P_2 \to \cdots \to P_n$(其中相邻排列可以是同时的)；

但在相对 K 做匀速运动的系统 K' 中考察，这些事件的排列次序可能仍然是(A)，但也可能根本不是。

2.4 洛伦兹变换的应用

2.4.1 速度变换

基于洛伦兹变换方程(2.3.10)，可得到速度变换公式

$$u'_x = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}[\gamma(x - vt)]}{\mathrm{d}\left[\gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)\right]} = \frac{\mathrm{d}x - v\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t - \frac{v}{c^2}\mathrm{d}x}$$

$$= \frac{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - v}{1 - \frac{v}{c^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} \equiv \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2}u_x} \tag{2.4.1a}$$

$$u'_y = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\left[\gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)\right]} = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,u_y}{1 - \frac{v}{c^2}u_x} \tag{2.4.1b}$$

$$u'_z = \frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t'} = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,u_z}{1 - \frac{v}{c^2}u_x} \tag{2.4.1c}$$

上述方程给出了 K 与 K'系之间的速度变换。有时，速度变换也称为

速度叠加定理。

假定在 K 系中考察，某个粒子的运动速度为 $\boldsymbol{u}=(u_x,u_y,u_z)$，那么，在 K' 系中考察，该粒子的运动速度 $\boldsymbol{u}'=(u'_x,u'_y,u'_z)$ 由方程(2.4.1)给出。当 $v\to\infty$ 时，回到了经典速度叠加公式。此时，方程(2.4.1)的一阶近似是经典速度合成公式。对于 K 系中的任意一束光，其速度可表示成如下形式：

$$\boldsymbol{c}=(u_x,u_y,u_z),\quad c=(u_x^2+u_y^2+u_z^2)^{\frac{1}{2}} \tag{2.4.2}$$

在 K' 系中可表示成如下形式：

$$\boldsymbol{c}'=(u'_x,u'_y,u'_z),\quad c'=(u'^2_x+u'^2_y+u'^2_z)^{\frac{1}{2}} \tag{2.4.3}$$

由方程(2.4.1)，得

$$\begin{aligned}
c' &= \left[\frac{(u_x-v)^2}{\left(1-\frac{v}{c^2}u_x\right)^2}+\frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)u_y^2}{\left(1-\frac{v}{c^2}u_x\right)^2}+\frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)u_z^2}{\left(1-\frac{v}{c^2}u_x\right)^2}\right]^{1/2}\\
&=\frac{1}{1-\frac{v}{c^2}u_x}\left[u_x^2-2u_xv+v^2+u_y^2+u_z^2-\frac{v^2}{c^2}(u_y^2+u_z^2)\right]^{1/2}\\
&=\frac{1}{1-\frac{v}{c^2}u_x}\left[c^2-2u_xv+v^2-\frac{v^2}{c^2}(c^2-u_x^2)\right]^{1/2}\\
&=\frac{c}{1-\frac{v}{c^2}u_x}\left(1-\frac{v}{c^2}u_x\right)=c
\end{aligned} \tag{2.4.4}$$

可见，速度变换公式(2.4.1)可以保证光速恒定假设成立。另外，应用速度变换公式(2.4.1)可以解释 Fizeau 于 1851 年做的流水干涉实验(参见 Fizeau，1851；Nascimento，1998；Selleri，2003)。当时，该实验的目的是为了检验 Fresnel(1818)的以太拖曳理论(参见 Nascimento，1998)是否成立。Fresnel 的理论有一个致命的弱点：对于具有不同频率的入射光，要求运动介质(比如流水)拖曳以太的量不同。按速度变换公式(2.4.1)，则可比较自然地导出运动介质中的光速。除了 Fizeau(1851)的实验证据之外，Airy(1871)的望远镜盛水实验，Zeeman(1914，1915)的流动水和运动透明固体棒实验，Zee-

man and Snethlage（1920）的运动石英棒实验，Zeeman et al.（1922）的运动火石玻璃棒实验，Macek et al.（2004）的流动空气实验等，均在一定的精度水平上证实了速度变换公式（2.4.1）。

另外，根据洛伦兹变换还可以导出加速度变换公式，这里省略。

2.4.2 多普勒效应和光行差

经典的多普勒效应由多普勒在1842年提出。多普勒效应是指，当光源与观测者之间有相对运动发生时，观测者会发现光谱线有位移。直观地说，就是观测者接收到的频率有变化。光行差现象是指由观测者的运动而引起的观测者所看到的光源的位置与真实位置之间的夹角，最先由Bradley（1729）发现（参见Bradley et al.，1931）。他观察到，恒星在一年的不同时间其表观位置有变化。这种现象归因于地球绕太阳的公转运动。确切地说，由于地球的公转运动，观测到的恒星位置（视位置）与恒星的真实位置有一差异，这一差异就是（周年）光行差。下面根据洛伦兹变换导出普遍的多普勒频移公式以及光行差公式。

考察一单色平面电磁波。为简单起见，假定在K系考察，波面法线$\boldsymbol{n}$处于$O-xy$平面内（这时$\boldsymbol{n}$也处于K'系$O'-x'y'$平面内）。$\boldsymbol{n}$与Ox轴的夹角为θ。在K'系考察，波面法线变为$\boldsymbol{n}'$，$\boldsymbol{n}'$与$O'x'$轴的夹角为θ'（一般情况下θ'与θ不同）。单色平面波在K和K'系中可分别表示成（假定$t=0$时，$t'=0$）如下形式：

$$\psi = A\cos2\pi f\left(t - \frac{x\cos\theta + y\sin\theta}{c}\right)$$

$$\psi' = A'\cos2\pi f'\left(t' - \frac{x'\cos\theta' + y'\sin\theta'}{c}\right) \tag{2.4.5}$$

其中f和f'分别表示平面波在K和K'系中考察时的频率。

由于相位$2\pi f[t-(x\cos\theta+y\sin\theta)/c]$是不变量（Rosser，1971），因此有

$$2\pi f\left(t - \frac{x\cos\theta + y\sin\theta}{c}\right) = 2\pi f'\left(t' - \frac{x'\cos\theta' + y'\sin\theta'}{c}\right) \tag{2.4.6}$$

另一方面，洛伦兹变换（2.3.10）的逆变换可以写成

$$\left.\begin{aligned} x &= \gamma(x' + vt') \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right) \end{aligned}\right\} \tag{2.4.7}$$

实际上,由于 K 与 K' 的对称性,直接可以根据方程(2.3.10)写出方程(2.4.7)(这时 v 用 $-v$ 代替)。将方程(2.4.7)代入方程(2.4.6),得

$$f\left[\gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right) - \frac{\cos\theta}{c}\gamma(x' + vt') - \frac{\sin\theta}{c}y'\right]$$

$$= f'\left(t' - \frac{\cos\theta'}{c}x' - \frac{\sin\theta'}{c}y'\right) \tag{2.4.8}$$

由于 t'、x'、y' 是任意变量,要使上述方程成立,方程两边相应变量前面的系数必须相等,即有

$$f\gamma\left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta\right) = f' \tag{2.4.9a}$$

$$f\gamma\left(\cos\theta - \frac{v}{c}\right) = f'\cos\theta' \tag{2.4.9b}$$

$$f\sin\theta = f'\sin\theta' \tag{2.4.9c}$$

方程(2.4.9a)给出了多普勒频移公式[注意到 $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$],即

$$f' = \frac{1 - \frac{v}{c}\cos\theta}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}f \tag{2.4.10}$$

方程(2.4.10)只取到一阶项,则得到经典多普勒频移公式

$$f' = \left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta\right)f \tag{2.4.11}$$

由上式可见,经典理论不存在横向多普勒频移(在方程(2.4.11)中代入 $\theta = \pi/2$ 便得到 $f' = f$)。

在狭义相对论中,由方程(2.4.10),令 $\theta = \pi/2$,可得到横向多普勒频移

$$f'_L = \frac{f}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{2.4.12}$$

由方程(2.4.9b)和(2.4.9c)得

$$\tan\theta' = \frac{\sin\theta}{\gamma\left(\cos\theta - \frac{v}{c}\right)} = \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{\cos\theta - \frac{v}{c}}\sin\theta \tag{2.4.13}$$

上式给出了狭义相对论意义下的光行差公式。若令 $v^2/c^2=0$,则得到经典光行差公式(Feynman et al.,1963;陆锴书,吴家让,1987)

$$\tan\theta' = \frac{\sin\theta}{\cos\theta - \frac{v}{c}} \tag{2.4.14}$$

假定星光在 K 系考察与 Oy 轴的反向重合(即从天顶方向射入),那么,在 K'系考察,星光的方向由下式决定(取 $\theta=3\pi/2$)

$$\tan(\pi+\alpha') = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,\frac{c}{v} \tag{2.4.15}$$

其中

$$\theta' = \pi + \alpha' \tag{2.4.16}$$

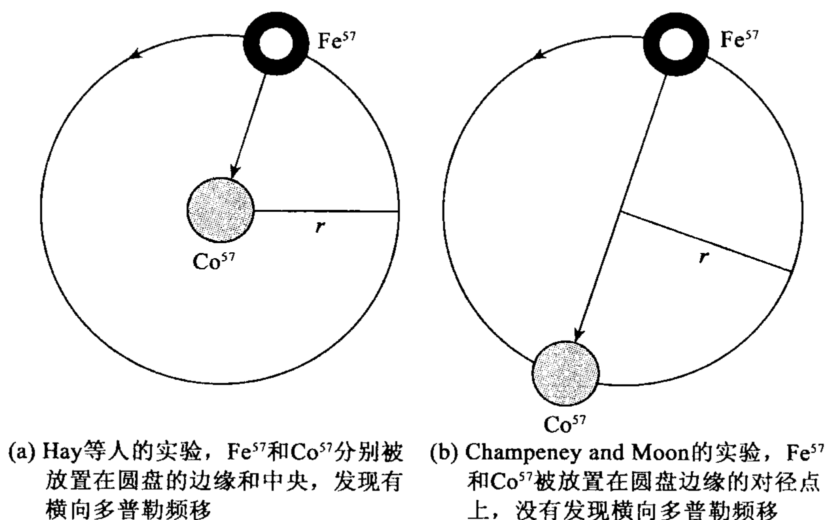
方程(2.4.13)的一阶近似(即取 $v^2/c^2=0$)就是经典光行差公式。

历史上有不少实验物理学家对多普勒效应进行了检验,其基本原理是比较飞行光源光谱线与静止光源光谱线之间的差异。在氢的极隧射线管中,电极放电产生的氢离子(H_2^+ 和 H_3^+)被强电场加速、准直,形成快速运动的氢离子束。这种快速运动的氢离子束可作为运动光源。将它们发射的光谱线与静止氢离子发射的光谱线进行比较,即可观测到多普勒频移。Stark et al.(1906)最早证实了经典多普勒频移(在方程(2.4.10)中将因子 v^2/c^2 取为 0 即为经典多普勒频移)。Ives and Stilwell(1938,1941)的实验结果表明,方程(2.4.10)是正确的。

Olin et al.(1973)利用运动原子核发射的 γ 射线测量了纵向多普勒频移,其原理与极隧射线实验类似。他们的实验结果表明,在3.5%的实验精度水平上,实验结果与方程(2.4.10)相符。

利用 Mössbauer 效应也可检验方程(2.4.10)。1958 年,Mössbauer 首先发现了原子核无反冲 γ 射线的发射和吸收(Mössbauer,1958a,b),这一效应即著名的 Mössbauer 效应(杨福家等,2002)。Pound and Rebka(1960a)利用 Fe^{57} 的 14.4keV 的 γ 射线进行实验,实验结果在允许误差范围内与方程(2.4.10)一致。为了检验横向多普勒效应(2.4.12),Hay et al.(1960)做了一个实验(参见图 2.4.1(a)):他们将 γ 射线源 Co^{57}(它俘获电子后变成 Fe^{57} 的激发态,后者随即放出 γ 射线)放在可高速转动的圆盘的中心,吸收体 Fe^{57} 放在圆盘的边缘(圆盘半径 6.2cm),圆盘的转速约 500 周/s。实验结果在 2% 的精度内与横向多普勒频移公式(2.4.12)符合。

Champeney and Moon(1961)也做了一个类似的实验,但他们是将射线源 Co^{57} 和吸收体 Fe^{57} 分别放在(旋转的)圆盘边缘的两个对径点上(参见图 2.4.1(b)),Co^{57} 和吸收体 Fe^{57} 的线速度大约为 $8\times10^{-8}c$。实验结果表明没有横向多普勒频移。



(a) Hay等人的实验,Fe^{57}和Co^{57}分别被放置在圆盘的边缘和中央,发现有横向多普勒频移

(b) Champeney and Moon的实验,Fe^{57}和Co^{57}被放置在圆盘边缘的对径点上,没有发现横向多普勒频移

图 2.4.1　检验横向多普勒频移的实验

Champeney and Moon 的实验说明了什么问题呢?假定观测者位

于圆盘中心，那么，发射源和吸收体均以线速度 $8\times10^{-8}c$ 相对观测者作横向运动，因此，发射源以及吸收体的固有振动频率相对观测者来说均由方程(2.4.12)决定。这表明，发射源与吸收体之间不存在横向多普勒频移，符合 Champeney and Moon(1961)的实验结果。但如果我们再深入一步思考，就会发现这种解释是不能令人满意的。因为发射源与吸收体之间存在相对(横向)运动速度，而实验完全是吸收体与发射源之间的事，与圆盘中心是否存在"观测者"无关。如若不然，我们可以设想 A 和 B 相对于"静止"的观测者 O 相向等速运动，于是，O 的断言是，时钟 A 和时钟 B 的运行速率一样快；但就 A 而言，B 处的时钟的运行速率如何呢？如果 A 也作出"时钟 A 和 B 的运行速率一样快"的断言，那么，就回到了牛顿的时间观，这是狭义相对论不允许的。按狭义相对论，A 与 B 之间的关系的判断必须由 A 或 B 来完成，不能用某个"中介人"来判断。但如果不能用"中介人"，那么，Champeney and Moon(1961)的实验结果与方程(2.4.12)不符。因此，我们并不认为 Champeney and Moon 的实验支持狭义相对论。对探讨此问题有兴趣的读者可参阅有关文献(例如，申文斌，1994)。

2.4.3 惯性质量公式

在牛顿力学中，一个粒子的惯性质量 m 被定义为该粒子所受到的力 $\boldsymbol{F}$ 与该粒子所获得的加速度 $\boldsymbol{a}$ 之间的一个比例系数，用函数形式表述就是

$$\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a} \tag{2.4.17}$$

并且假定了惯性质量 m 与运动速度无关。实际上，牛顿第二定律是用下述形式表述的

$$\boldsymbol{F}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} \tag{2.4.18}$$

其中

$$\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{u} \tag{2.4.19}$$

是粒子的动量，$\boldsymbol{u}$ 是粒子的运动速度。在牛顿力学中，由于 m 是常数，因此，方程(2.4.18)与方程(2.4.17)一致。

在狭义相对论中，并不假定惯性质量是不变量。在假定动量守恒定律成立的前提下，通过考察两个完全弹性球的碰撞过程，并应用速度变换公式(2.4.1)，即可推导出如下的惯性质量方程(Lewis and Tolman，1909；Born，1924；Rosser，1971)：

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{2.4.20}$$

其中 m_0 是静止(惯性)质量，这里的静止质量是相对于某个惯性系 K 而言的。

上述方程表明，运动粒子的惯性质量增大了。按狭义相对论，粒子的动量和力分别由方程(2.4.19)和方程(2.4.18)来定义，其中惯性质量由方程(2.4.20)给出。Rosser(1971)给出了方程(2.4.20)的详细推导过程。

在狭义相对论之前，Abraham(1903)把电子看做是一种以速度 v 运动的完全刚性的球形粒子(参见 Rosser，1971)，并由此导出了惯性质量公式(Miller，1981；张元仲，1979)

$$m = \frac{3}{4}\frac{m_0}{\beta^2}\left(\frac{1+\beta^2}{2\beta}\ln\frac{1+\beta}{1-\beta} - 1\right) \tag{2.4.21}$$

其中 $\beta = v/c$。

洛伦兹(1904)则在“电子沿运动方向按因子$\sqrt{1-\beta^2}$发生收缩”的假定之下，导出了电子(惯性)质量随速度变化的公式(2.4.20)，参见(Lorentz et al.，1923)。

无论采用方程(2.4.20)还是方程(2.4.21)，均可解释 Kaufmann(1901)的电磁偏转实验。该实验的基本原理是利用电磁偏转方法测定电子的运动速度对电子的荷质比 e/m 的响应。实验表明 e/m 随速度的增加而减小。在电荷不变性假定之下，只能认为 m 随速度的增加而增大。但 Kaufmann(1901) 的实验无法区分方程(2.4.20)与方程(2.4.21)究竟哪个正确。后来，Rogers et al.(1940)的电子偏转实验在1%的精度水平上支持方程(2.4.20)，不支持方程(2.4.21)。

Grove(1953)利用质子在回旋加速器中的运动过程，在0.1%的

精度水平上证实了方程(2.4.20),详见 Rosser(1971)。Champion(1932)则利用电子的弹性碰撞实验(观测电子经弹性碰撞之后的散射角)也证实了方程(2.4.20)。不过,最终对 Champion 实验结果的解释应该应用量子力学中的散射理论。因为电子属于微观粒子,服从量子力学运动规律。单就 Champion(1932)实验本身而言,后来 Farago and Janossy(1957)指出,Champion 实验的实际误差要比实验中所考虑的误差更大,因此,该实验对检验质量公式(2.4.20)没有提供充分的证据。另外,Raboy and Trail(1958)则指出,Champion 实验不能区分方程(2.4.20)与方程(2.4.21)。

2.4.4 质能公式

按照功的一般定义,粒子在力 $\boldsymbol{F}$ 的作用下行进一段距离 $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ 被做的功为

$$\mathrm{d}w = \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} \tag{2.4.22}$$

如果假定此全部功用于增加粒子的内能,那么,粒子的内能增量为

$$\mathrm{d}E = \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} \tag{2.4.23}$$

由于粒子的内能变化与粒子行进的路径无关,只取决于路径的两个端点,因此,粒子在力 $\boldsymbol{F}$ 的作用下从 A 点运动到 B 点之后,内能的增加量为

$$\Delta E = \int_A^B \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} \tag{2.4.24}$$

将方程(2.4.18)~(2.4.20)代入方程(2.4.24)并完成积分运算,便得到如下结果

$$\Delta E = mc^2 - m_0c^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_0c^2 \tag{2.4.25}$$

这里假定了当粒子处于 A 点时为静止状态,处于 B 点时运动速度为 v。

由方程(2.4.25),一个自然的推想就是,粒子处于静止状态时具有能量 m_0c^2(称为静质量能),当运动速度达到 v 时,具有能量 mc^2。于是,可令

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{2.4.26}$$

方程(2.4.26)就是著名的爱因斯坦质能公式,它是爱因斯坦于 1908 年基于狭义相对论得到的(Lorentz et al.,1923)。由于光速 c 约等于 3×10^8m/s($c = 299792458$m/s,参见 Stöcker,2004;Mohr et al.,2008),因此,即使一小块物质,比如质量只有 1g,它的能量如果全部释放出来,将有 9×10^{13}J(9×10^{20}erg,1 焦 $= 1 \times 10^7$ 尔格)。粗略地说,这一能量相当于一头黄牛耕地 700 万年(每天耕地时间按 10 小时计)所做的功,或相当于一个 6 级地震释放出来的能量(按震级 M 与能量 E 之间的关系式 $\log E = 12 + 1.5M$ 估计,其中 E 以尔格为单位,参见 Lay and Wallace,1995),约等于 0.3 亿千瓦时电能。

质能方程(2.4.26)可以说是狭义相对论中的一个最重要的结论。一个物体具有质量 m,就相应地具有能量 E。反过来,具有能量 E 的物体也就具有质量 m。E 与 m 由方程(2.4.26)联系了起来。通常,对质能公式(2.4.26)不能直接进行检验,而是通过测量物体的能量的变化 ΔE 和质量的变化 Δm 来实现的。显然,我们可以写出如下方程

$$\Delta E = c^2 \Delta m \tag{2.4.27}$$

最早的检验方程(2.4.27)的实验是由 Cockcraft and Walton (1932)完成的。他们的实验结果基本上与方程(2.4.27)一致,但实验精度不高。Smith(1939)以更高的精度证实了方程(2.4.27)的正确性。后来,Hudson and Johnson(1968)的实验在 0.2% 的精度水平上证实了方程(2.4.27)的正确性。

2.5　形式发展

2.5.1　闵可夫斯基空间

按照牛顿的观点,空间和时间都是绝对的,二者没有内在的关联。爱因斯坦则指出了二者的关联性。早在 1904 年,彭加勒就指出

了空间和时间有可能构成四维连续世界(参见中译本,彭加勒,2003)。闵可夫斯基(1908)更进了一步,他在《空间和时间》一文中指出(参见 Lorentz et al.,1923):“从现在起,孤立的空间和孤立的时间注定要消失成为影子,只有两者的统一才能保持独立的存在。”将空间直角坐标 x,y,z 和时间坐标 t 等同看待,则得到一个由数组(t,x,y,z)表示的四维连续区。闵可夫斯基把(t,x,y,z)称为一个世界点,把一切可以设想的数组(t,x,y,z)的全体称为四维世界。任何一个事件的连续运动过程都可以用数组(t,x,y,z)表示出来,由该数组所给出的一条曲线称为世界线。可以认为,整个四维世界由世界线构成。由于闵可夫斯基的卓越研究,狭义相对性假设可以用下面更广义的假设来替换:原时间隔

$$ds^2 \equiv c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \qquad (2.5.1)$$

是不变量。简单地理解,这里的原时间隔是指四维时空中相邻两点之间的距离。“原时间隔是不变量”,是指无论在什么参考系中考察,原时间隔 ds^2 都保持不变,尽管 dt、dx、dy、dz 可以变化。不难验证,把洛伦兹变换方程(2.3.10)代入方程(2.5.1)就会发现 ds^2 保持不变,即 $ds'^2 = ds^2$。反过来也可以证明,使原时 ds^2 保持不变的非奇异变换只有洛伦兹型变换(当然不是由方程(2.3.10)给出的形式,而是更一般的形式,参见方程(2.5.8),因为方程(2.3.10)或方程(2.4.7)给出的只是特例)。简单地说,如果承认四维时空,承认爱因斯坦的狭义相对论,那么,四维(平直)时空中的任意两个相邻点之间的距离(也称原时间隔),只能取(2.5.1)形式。

2.5.2 光速单位制

为了方便起见,我们引进光速单位制,即令 $c=1$。由于速度的定义是[长度]/[时间](按国际单位制可表示成 m/s),因此,在光速单位制中,长度与时间具有同样的量纲,而速度则是无量纲量。假定有一粒子的运动速度为 u,那么,在光速单位制中进行实际运算时应该用 u/c 来代替。这里需着重指出,以下在任何方程中遇到普通速度 u,其数值是无量纲小量,即采用国际单位制下的实际速度 u 与真空中光速 c 的比值 u/c。假定有一距离 L,在光速单位制中运算时应

取 L/c,实际上就是 L 本身(因为 $c=1$),以秒为单位,从而得到时间量纲。时间的单位没有变化。从现在起,我们将采用光速单位制。在光速单位制中,方程(2.5.1)可表示成

$$ds^2 = d\tau^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \tag{2.5.2}$$

用 x^0 表示时间 t,用 x^1、x^2、x^3 分别表示位置矢量 $\boldsymbol{x}$ 的笛卡尔坐标分量 x、y、z,并引进闵可夫斯基度规

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{cases} -1 & \alpha = \beta = 0 \\ +1 & \alpha = \beta = 1,2,3 \\ 0 & \alpha \neq \beta \end{cases} \tag{2.5.3}$$

则原时间隔可以表述成如下简明形式

$$d\tau^2 = dt^2 - d\boldsymbol{x}^2 = -\eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \tag{2.5.4}$$

这里以及以后均采用爱因斯坦求和约定:两个希腊指标(如 α,β,γ 等)相同,并且一个在上,一个在下,则表示遍及 0,1,2,3 求和;如果是两个拉丁指标(如 i,j,k 等)相同,一个在上,一个在下,则表示遍及 1,2,3 求和。其他情形不求和,除非作特别说明。

由方程(2.5.4),得

$$\frac{d\tau^2}{dt^2} = 1 - \frac{d\boldsymbol{x}^2}{dt^2} \tag{2.5.5}$$

其中 $d\boldsymbol{x}^2/dt^2$ 表示粒子的运动速度。对于光子,其运动速度为 $c\equiv 1$,即有 $d\tau^2/dt^2 = 0$,因此,光的传播由下列方程描述

$$d\tau = 0 \tag{2.5.6}$$

由于洛伦兹变换不改变原时间隔,即 $d\tau' = d\tau$,因此,由方程(2.5.6)得 $d\tau' = 0$,即 $|d\boldsymbol{x}'/dt'| = 1$。这表明光速在新的惯性参考(坐标)系中仍然是 1。

2.5.3　事件间隔

一个世界点 (t,x,y,z) 也称为一个事件。整个四维世界可以看作由无数事件构成。由于每一个事件都对应于一个世界点,因此,任意两个相邻事件之间的间隔可以用对应的相邻世界点之间的空间间隔表示出来。假定事件 P 和 Q 所对应的世界点分别为 (t,x,y,z) 和 $(t+dt, x+dx, y+dy, z+dz)$,那么,事件 P 与 Q 的间隔由方程

(2.5.4)表示。当 $d\tau^2>0$、$d\tau^2<0$、$d\tau^2=0$ 时,分别称事件 P 与 Q 的间隔为类时的、类空的、类零的(或类光的)。如果事件间隔是类时的,则可利用光信号建立事件 P 与 Q 之间的联系。但如果事件间隔是类零的或类空的,则无法采用光信号建立 P 与 Q 之间的联系。为了证实这一点,由方程(2.5.4)得

$$\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 = 1 - u^2 \tag{2.5.7}$$

其中 $u=|\boldsymbol{u}|$ 是事件 P 与 Q 之间的分离速度。

当 P、Q 的分离速度小于光速时,可以用光信号建立它们之间的联系,这时,事件间隔属于类时的($d\tau^2>0$)情况。当它们的分离速度等于或大于光速时,无法用光信号建立它们之间的联系,因为由 P(或 Q)发出的光信号永远追不上 Q(或 P),这是属于类零或类空的($d\tau^2=0$或 $d\tau^2<0$)情况。

2.5.4 一般洛伦兹变换表示

一般洛伦兹变换可表示成如下形式(Weinberg,1972):

$$x'^{\alpha} = \Lambda^{\alpha}{}_{\beta}x^{\beta} + a^{\alpha} \tag{2.5.8}$$

其中,$\Lambda^{\alpha}{}_{\beta}$ 和 a^{α} 是常数,且满足条件

$$\Lambda^{\alpha}{}_{\gamma}\Lambda^{\beta}{}_{\delta}\eta_{\alpha\beta} = \eta_{\gamma\delta} \tag{2.5.9}$$

其中 $\eta_{\gamma\delta}$ 是闵可夫斯基度规。

若采用由方程(2.3.10)给出的特殊洛伦兹变换,那么,$a^{\alpha}=0$,$\Lambda^{\alpha}{}_{\beta}$ 由下列矩阵表示

$$\Lambda^{\alpha}{}_{\beta} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma v & 0 & 0 \\ -\gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.5.10}$$

下面考察一般洛伦兹变换(2.5.8)是否保持原时间隔 $d\tau^2$ 不变。为此,考察

$$d\tau'^2 = -\eta_{\alpha\beta}dx'^{\alpha}dx'^{\beta} \tag{2.5.11}$$

将方程(2.5.8)代入上式并顾及方程(2.5.9),注意到 $da^{\alpha}=0$,得

$$d\tau'^2 = -\eta_{\alpha\beta}\Lambda^{\alpha}{}_{\gamma}dx^{\gamma}\Lambda^{\beta}{}_{\delta}dx^{\delta} = -\eta_{\alpha\beta}\Lambda^{\alpha}{}_{\gamma}\Lambda^{\beta}{}_{\delta}dx^{\gamma}dx^{\delta}$$

$$= -\eta_{\gamma\delta}\mathrm{d}x^{\gamma}\mathrm{d}x^{\delta} = \mathrm{d}\tau^2 \qquad (2.5.12)$$

可见,一般洛伦兹变换(2.5.8)使原时间隔保持不变。

一般洛伦兹变换具有如下一组解(Weinberg,1972):

$$\Lambda^0{}_0 = \gamma \equiv (1-v^2)^{-\frac{1}{2}} \qquad (2.5.13a)$$

$$\Lambda^i{}_0 = \gamma v^i \qquad (2.5.13b)$$

$$\Lambda^i{}_j = \delta^i{}_j + v^i v_j \frac{\gamma - 1}{v^2} \qquad (2.5.13c)$$

$$\Lambda^0{}_j = \gamma v_j, \quad i,j = 1,2,3 \qquad (2.5.13d)$$

其中,$v^i \equiv v_i$,$\delta^i{}_j$ 是(三维)Kronecker 符号:当 $i=j$ 时,$\delta^i{}_j = 1$;当 $i \neq j$ 时,$\delta^i{}_j = 0$。

今后提到一般洛伦兹变换,是指$\Lambda^\alpha{}_\beta$ 由方程(2.5.13)给出,尽管这并不是最广义的洛伦兹变换。

2.6 相对论动力学

2.6.1 相对论力

定义一个作用于坐标为 $x^\alpha(\tau)$ 的粒子上的相对论性的力(Weinberg,1972)

$$f^\alpha = m\frac{\mathrm{d}^2 x^\alpha}{\mathrm{d}\tau^2} \qquad (2.6.1)$$

其中 m 是粒子的静止质量。

若f^α已知,则可求出粒子的运动轨迹。如何求定f^α呢?有两条性质可以把f^α与牛顿力联系起来(Weinberg,1972):

(1)粒子静止时,$\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}t$,因此,$f^\alpha = F^\alpha$,其中 F^i是普通牛顿力 $\boldsymbol{F}$(它是四维力f^α的空间部分)的笛卡儿分量,$F^0 = 0$。

(2)在一般洛伦兹变换下,$\mathrm{d}x'^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\beta \mathrm{d}x^\beta$,其中$\Lambda^\alpha{}_\beta$ 由方程(2.5.13)给出。由于 $\mathrm{d}\tau$ 是不变量,因此

$$f'^\alpha = m\frac{\mathrm{d}^2 x'^\alpha}{\mathrm{d}\tau'^2} = m\Lambda^\alpha{}_\beta \frac{\mathrm{d}^2 x^\beta}{\mathrm{d}\tau^2} = \Lambda^\alpha{}_\beta f^\beta \qquad (2.6.2)$$

任何量,如果像 dx^α 或 f^α 那样按照方程(2.6.2)变换,则称为四维矢量。矢量属于一阶张量,参见2.7节和3.2节。

建立一个随粒子一起运动的坐标系 x'^α,在这个坐标系中粒子处于静止状态。于是,按(1),粒子在 x'^α 系中所受的力可写成 $f'^\alpha = F^\alpha$,其中 $F^0=0$。但在坐标系 x^α 中考察,粒子以速度 $\boldsymbol{v}$ 运动。为此,作一个洛伦兹变换,便得到在 x^α 系中的描述

$$f^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\beta(\boldsymbol{v})F^\beta \tag{2.6.3}$$

将方程(2.5.13)代入上式,即可得到显式

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{F} + (\gamma - 1)\boldsymbol{v}\frac{(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{F})}{v^2} \tag{2.6.4a}$$

$$f^0 = \gamma\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{F} = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{f} \tag{2.6.4b}$$

2.6.2 能量和动量

根据相对论力的定义式(2.6.1),有

$$f^\alpha = m\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2} = \frac{d}{d\tau}\left(m\frac{dx^\alpha}{d\tau}\right) \tag{2.6.5}$$

其中,m 是静止质量,是常数。若令

$$p^\alpha = m\frac{dx^\alpha}{d\tau} \tag{2.6.6}$$

则相对论性的牛顿第二定律可表示成

$$\frac{dp^\alpha}{d\tau} = f^\alpha \tag{2.6.7}$$

p^α 称为粒子的能量动量四维矢量。由于

$$d\tau \equiv (dt^2 - d\boldsymbol{x}^2)^{1/2} = (1 - v^2)^{1/2}dt \tag{2.6.8}$$

于是,p^α 的空间分量($\alpha \neq 0$)构成动量矢量

$$\boldsymbol{p} = m\gamma\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = m\gamma\boldsymbol{v} \tag{2.6.9}$$

p^α 的时间分量($\alpha = 0$)是能量(注意光速单位制)

$$p^0 \equiv E = m\frac{dx^0}{d\tau} = m\frac{dt}{d\tau} = m\gamma \tag{2.6.10}$$

在光速单位制中,$c=1$,因此,1s 相当于 3×10^{10}cm,而 1g 相当于 9×10^{13}J。另外,由方程(2.6.6)定义的能量动量四维矢量满足形如

式(2.6.2)的方程

$$p'^{\alpha} = m\frac{\mathrm{d}^2x'^{\alpha}}{\mathrm{d}\tau'^2} = m\frac{\Lambda^{\alpha}{}_{\beta}\mathrm{d}^2x^{\beta}}{\mathrm{d}\tau^2} = \Lambda^{\alpha}{}_{\beta}m\frac{\mathrm{d}^2x^{\beta}}{\mathrm{d}\tau^2} = \Lambda^{\alpha}{}_{\beta}p^{\beta} \tag{2.6.11}$$

由方程(2.6.6)以及方程(2.5.4)得

$$\eta_{\alpha\beta}p^{\alpha}p^{\beta} = \eta_{\alpha\beta}m^2\frac{\mathrm{d}x^{\alpha}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^{\beta}}{\mathrm{d}\tau} = -m^2\frac{(-\eta_{\alpha\beta}\mathrm{d}x^{\alpha}\mathrm{d}x^{\beta})}{\mathrm{d}\tau^2} = -m^2 \tag{2.6.12}$$

将方程(2.5.3)代入上式，得

$$-(p^0)^2 + p_ip^i = -m^2 \tag{2.6.13}$$

故有能量动量方程

$$E(p^i) \equiv p^0 = (p_ip^i + m^2)^{1/2} \tag{2.6.14}$$

其中，$p_i \equiv p^i$，$p_ip^i \equiv p_1p^1 + p_2p^2 + p_3p^3$。

在相对论中，光子被认为是没有静止质量的以光速运动的粒子。近代物理学认为，以光速运动的粒子还有中微子。不过，中微子是否存在静止质量的问题目前尚无定论，实验所能表明的是，如果中微子有静止质量，其上限也不会超过 10^{-40}kg。无论是光子还是中微子，它们都具有能量和动量，其中，能量与动量之间的关系由下列方程给出

$$E = \sqrt{p_ip^i} \tag{2.6.15}$$

这只要在方程(2.6.14)中令 $m = 0$ 即可得到。

2.7　矢量和张量

前面曾经用到了四维矢量的概念。对于任意一个量 V^{α}，当坐标系 x^{α} 按如下规律变换

$$x^{\alpha} \to x'^{\alpha} = \Lambda^{\alpha}{}_{\beta}x^{\beta} \tag{2.7.1}$$

时，V^{α} 的变换规律为

$$V^{\alpha} \to V'^{\alpha} = \Lambda^{\alpha}{}_{\beta}V^{\beta} \tag{2.7.2}$$

则称 V^{α} 为逆变四维矢量，其中 $\Lambda^{\alpha}{}_{\beta}$ 由式(2.5.13)给出。对于任意一

个量 U_α，若变换规律由下式确定

$$U_\alpha \to U'_\alpha = \Lambda_\alpha{}^\beta U_\beta \tag{2.7.3}$$

则称 U_α 为协变四维矢量，其中 $\Lambda_\alpha{}^\beta$ 是$\Lambda^\alpha{}_\beta$ 的逆矩阵，定义为

$$\Lambda_\alpha{}^\beta = \eta_{\alpha\gamma}\eta^{\beta\delta}\Lambda^\gamma{}_\delta \tag{2.7.4}$$

引入 $\eta^{\beta\delta}$的目的是为了符合求和约定，$\eta^{\beta\delta}$在数值上与 $\eta_{\beta\delta}$（闵可夫斯基度规）完全相同。

基于方程(2.5.3)，我们有

$$\eta^{\beta\delta}\eta_{\alpha\delta} = \delta_\alpha{}^\beta \equiv \begin{cases} +1 & \alpha = \beta \\ 0 & \alpha \neq \beta \end{cases} \tag{2.7.5}$$

其中 $\delta_\alpha{}^\beta$ 是四维 Kronecker 符号。由方程(2.7.4)和(2.7.5)，并顾及方程(2.5.9)，得

$$\begin{aligned} \Lambda_\alpha{}^\gamma \Lambda^\alpha{}_\beta &= \eta_{\alpha\lambda}\eta^{\gamma\varepsilon}\Lambda_\varepsilon{}^\lambda \Lambda^\alpha{}_\beta = \eta^{\gamma\varepsilon}(\Lambda_\varepsilon{}^\lambda \Lambda^\alpha{}_\beta\eta_{\alpha\lambda}) \\ &= \eta^{\gamma\varepsilon}\eta_{\varepsilon\beta} = \delta^\gamma{}_\beta \end{aligned} \tag{2.7.6}$$

由此可见，$\Lambda_\alpha{}^\beta$ 的确是$\Lambda^\alpha{}_\beta$ 的逆矩阵。进一步，可推出逆变和协变四维矢量的标量积是不变量

$$U'_\alpha V'^\alpha = \Lambda_\alpha{}^\beta U_\beta \Lambda^\alpha{}_\delta V^\delta = \delta^\beta{}_\delta U_\beta V^\delta = U_\beta V^\beta \tag{2.7.7}$$

每个逆变四维矢量 V^β 对应有一个协变四维矢量，定义为

$$V_\alpha \equiv \eta_{\alpha\beta}V^\beta \tag{2.7.8}$$

因此（参照方程(2.7.2)和方程(2.7.4)）

$$\begin{aligned} V'_\alpha &= \eta_{\alpha\beta}V'^\beta = \eta_{\alpha\beta}\Lambda^\beta{}_\delta V^\delta = \eta_{\alpha\beta}\Lambda^\beta{}_\delta(\eta^{\delta\lambda}V_\lambda) \\ &= \eta_{\alpha\beta}\eta^{\delta\lambda}\Lambda^\beta{}_\delta V_\lambda = \Lambda_\alpha{}^\lambda V_\lambda \end{aligned} \tag{2.7.9}$$

同理，每个协变四维矢量 U_α 对应有一个逆变四维矢量

$$U^\alpha = \eta^{\alpha\beta}U_\beta \tag{2.7.10}$$

值得注意的是，$\eta^{\alpha\beta}$和 $\eta_{\alpha\beta}$可分别用来提升或下降指标，即

$$\begin{aligned} \eta^{\alpha\beta}V_\beta &= \eta^{\alpha\beta}(\eta_{\beta\delta}V^\delta) = \delta^\alpha{}_\delta V^\delta = V^\alpha \\ \eta_{\alpha\beta}U^\beta &= \eta_{\alpha\beta}(\eta^{\beta\delta}U_\delta) = \delta^\delta{}_\alpha U_\delta = U_\alpha \end{aligned} \tag{2.7.11}$$

由于 dx^α 的变换规则为（参见方程(2.7.1)）

$$dx'^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\beta dx^\beta \tag{2.7.12}$$

因此，dx^α 为逆变矢量。

对于梯度$\partial/\partial x^\alpha$ 来说，由于

$$\frac{\partial}{\partial x'^\alpha} = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha}\frac{\partial}{\partial x^\beta} = \Lambda_\alpha{}^\beta\frac{\partial}{\partial x^\beta} \tag{2.7.13}$$

因此，由方程(2.7.3)可知，梯度是协变矢量。上式用到了

$$\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha} = \Lambda_\alpha{}^\beta \tag{2.7.14}$$

因此

$$\mathrm{d}x'^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\beta \mathrm{d}x^\beta \tag{2.7.15}$$

在上式两边同时作用 $\Lambda_\alpha{}^\lambda$，得

$$\Lambda_\alpha{}^\lambda \mathrm{d}x'^\alpha = \Lambda_\alpha{}^\lambda\Lambda^\alpha{}_\beta \mathrm{d}x^\beta = \delta_\beta{}^\lambda \mathrm{d}x^\beta = \mathrm{d}x^\lambda \tag{2.7.16}$$

逆变矢量 V^α 的散度(即$\partial V^\alpha/\partial x^\alpha$)是不变量

$$\begin{aligned}\frac{\partial V'^\alpha}{\partial x'^\alpha} &= \frac{\partial}{\partial x'^\alpha}(\Lambda^\alpha{}_\beta V^\beta) = \Lambda^\alpha{}_\beta\frac{\partial V^\beta}{\partial x^\lambda}\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\alpha}\\ &= \Lambda^\alpha{}_\beta\Lambda_\alpha{}^\lambda\frac{\partial V^\beta}{\partial x^\lambda} = \delta_\beta{}^\lambda\frac{\partial V^\beta}{\partial x^\lambda} = \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\alpha}\end{aligned} \tag{2.7.17}$$

D'Alembert 算子

$$\Box^2 = -\eta^{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x^\beta}\frac{\partial}{\partial x^\alpha} = \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \tag{2.7.18}$$

是不变量，此因协变矢量$\partial/\partial x^\beta$ 经 $\eta^{\alpha\beta}$提升之后变成了逆变矢量 B^α，后者再与协变矢量$\partial/\partial x^\beta$ 作用(缩并)之后变成了标量(不变量)。在方程(2.7.18)中，∇是 Nabla 算符(即梯度算符)。

标量没有指标，或认为具有零指标，属于零阶张量。矢量具有一个上指标或下指标，满足一定的变换规律，属于一阶张量。一般的张量具有多个上指标或下指标，同样满足一定的变换规律。严格的张量定义将涉及近代数学概念(比如流形、拓扑、映射等)，我们将在下一章给出(见 3.2 节)。下面只给出浅显的定义。

设有一个对象$T^\gamma{}_{\alpha\beta}$，满足如下变换规则

$$T^\gamma{}_{\alpha\beta} \to T'^\gamma{}_{\alpha\beta} = \Lambda^\gamma{}_\delta\Lambda_\alpha{}^\varepsilon\Lambda_\beta{}^\lambda T^\delta{}_{\varepsilon\lambda} \tag{2.7.19}$$

则称$T^\gamma{}_{\alpha\beta}$为(三指标)三阶张量，确切地说，是基于四维空间的三阶混合张量。二阶张量形如$T^\alpha{}_\beta$，$T^{\alpha\beta}$，$T_{\alpha\beta}$，$T_\alpha{}^\beta$。这里需注意，指标的位置以及顺序不是无关紧要的。比如，$T^\alpha{}_\beta$ 和 $T_\alpha{}^\beta$ 可以相同，也可以

不同。构成张量的方法主要有以下几种：

(1)线性组合。具有相同上标及下标的张量的线性组合仍然是张量，且有与原始张量相同的上标和下标。比如，设$R^{\alpha}{}_{\beta}$和$S^{\alpha}{}_{\beta}$是张量，a和b是标量(即常数)，则

$$T^{\alpha}{}_{\beta} = a\,R^{\alpha}{}_{\beta} + b\,S^{\alpha}{}_{\beta} \tag{2.7.20}$$

是张量，这一点很容易证实。

(2)直积。两个张量的分量的乘积产生一个张量，其上标和下标由原来两个张量的全部上标和下标构成。例如，设$A^{\alpha}{}_{\beta}$和B^{γ}是张量，则

$$T^{\alpha}{}_{\beta}{}^{\gamma} = A^{\alpha}{}_{\beta}B^{\gamma} \tag{2.7.21}$$

也是张量，此因

$$T'^{\alpha}{}_{\beta}{}^{\gamma} = A'^{\alpha}{}_{\beta}B'^{\gamma} = \Lambda^{\alpha}{}_{\delta}\Lambda_{\varepsilon}{}^{\beta}\,\Lambda^{\gamma}{}_{\lambda}\,A^{\delta}{}_{\varepsilon}B^{\lambda} = \Lambda^{\alpha}{}_{\delta}\,\Lambda^{\varepsilon}{}_{\beta}\,\Lambda^{\gamma}{}_{\lambda}\,T^{\delta}{}_{\varepsilon}{}^{\lambda} \tag{2.7.22}$$

(3)缩并。令一个张量的上指标与下指标相同，再将它们遍历0、1、2、3求和，则产生一个只缺少此二指标的张量。例如，设$T^{\alpha}{}_{\beta}{}^{\gamma\delta}$是张量，则

$$T^{\alpha\gamma} = T^{\alpha}{}_{\beta}{}^{\gamma\beta} \tag{2.7.23}$$

也是一张量(验证从略)。需要说明的是，张量$T^{\alpha}{}_{\beta}{}^{\gamma\delta}$共有三种缩并法，由这三种缩并法得到的张量$T^{\alpha}{}_{\beta}{}^{\gamma\beta}$、$T^{\alpha}{}_{\beta}{}^{\beta\delta}$以及$T^{\beta}{}_{\beta}{}^{\gamma\delta}$可能相同，也可能不同。

(4)微商。任何一个张量的导数$\partial/\partial x^{\alpha}$是增加了一个下标$\alpha$的张量。例如，设$T^{\beta\gamma}$是张量，则

$$T_{\alpha}{}^{\beta\gamma} = \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}T^{\beta\gamma} \tag{2.7.24}$$

也是张量，这是因为

$$\begin{aligned} T'_{\alpha}{}^{\beta\gamma} &= \frac{\partial}{\partial x'^{\alpha}}T'^{\beta\gamma} = \Lambda_{\alpha}{}^{\delta}\,\frac{\partial}{\partial x^{\delta}}(\Lambda^{\beta}{}_{\varepsilon}\,\Lambda^{\gamma}{}_{\lambda}T^{\varepsilon\lambda}) \\ &= \Lambda_{\alpha}{}^{\delta}\,\Lambda^{\beta}{}_{\varepsilon}\,\Lambda^{\gamma}{}_{\lambda}\,\frac{\partial}{\partial x^{\delta}}T^{\varepsilon\lambda} = \Lambda_{\alpha}{}^{\delta}\,\Lambda^{\beta}{}_{\varepsilon}\,\Lambda^{\gamma}{}_{\lambda}T_{\delta}{}^{\varepsilon\lambda} \end{aligned} \tag{2.7.25}$$

除了标量之外，存在三种特殊的张量，其分量在所有坐标系(这里是指由洛伦兹变换相联系的所有坐标系)中相同。

i)由方程(2.5.3)定义的闵可夫斯基张量 $\eta_{\alpha\beta}$ 和 $\eta^{\alpha\beta}$。由于(根据方程(2.5.9))

$$\eta_{\alpha\beta} = \Lambda_{\alpha}{}^{\gamma} \Lambda_{\beta}{}^{\delta} \eta_{\gamma\delta} \tag{2.7.26}$$

以及

$$\eta^{\alpha\varepsilon}\eta^{\beta\lambda}\eta_{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\varepsilon}\eta^{\beta\lambda} \Lambda^{\gamma}{}_{\alpha} \Lambda^{\delta}{}_{\beta}\eta_{\gamma\delta}$$

$$\eta^{\alpha\varepsilon}\delta^{\lambda}_{\alpha} = (\eta^{\alpha\varepsilon} \Lambda^{\gamma}{}_{\alpha}\eta_{\gamma\delta})(\eta^{\beta\lambda} \Lambda^{\kappa}{}_{\beta}\eta_{\kappa\sigma})\eta^{\sigma\delta}$$

$$\eta^{\varepsilon\lambda} = \Lambda_{\delta}{}^{\varepsilon}\Lambda_{\sigma}{}^{\lambda}\eta^{\delta\sigma} \tag{2.7.27}$$

因此，$\eta_{\alpha\beta}$ 和 $\eta^{\alpha\beta}$ 分别是二阶协变张量和二阶逆变张量。

由于 $\eta_{\alpha\beta}$ 与 $\eta^{\alpha\gamma}$ 的乘积仍然是张量，因此，Kronecker 符号

$$\delta^{\alpha}{}_{\beta} = \eta^{\alpha\gamma}\eta_{\gamma\beta} \tag{2.7.28}$$

也是张量，确切地说是二阶混合张量。

ii)Levi-Civita 张量定义如下

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \begin{cases} +1 & \text{若 } \alpha\beta\gamma\delta \text{ 是 0123 的偶置换} \\ -1 & \text{若 } \alpha\beta\gamma\delta \text{ 是 0123 的奇置换} \\ 0 & \text{其他情形} \end{cases} \tag{2.7.29}$$

可以证明(Weinberg，1972；Schutz，1980)

$$\Lambda^{\alpha}{}_{\varepsilon} \Lambda^{\beta}{}_{\sigma} \Lambda^{\gamma}{}_{\lambda} \Lambda^{\delta}{}_{\kappa}\varepsilon^{\varepsilon\sigma\lambda\kappa} = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \tag{2.7.30}$$

因此，$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ 的确是一张量，而且它的每一个分量在洛伦兹变换之下保持不变。

iii)零张量定义为一个具有任意选取的上指标与下指标式样的张量，其全部分量为零。注意零张量并非零阶张量，后者是标量。

由于 $\eta_{\alpha\beta}$ 和 $\eta^{\alpha\beta}$ 均为张量，因此，根据张量积的构成规则(参见第 3 章)，对于任意张量 T，可用 $\eta_{\alpha\beta}$ 或 $\eta^{\alpha\beta}$ 来下降或提升张量 T 的上指标或下指标。例如，设 $T_{\alpha\beta\gamma}$ 是张量，则 $T_{\alpha}{}^{\delta}{}_{\gamma} = \eta^{\delta\beta}T_{\alpha\beta\gamma}$ 也是张量。对于 Levi-Civita 张量 $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$，当下降所有指标后得到一新的张量 $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$。$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ 与 $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ 有如下关系(Schutz，1980)

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = -\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \tag{2.7.31}$$

如果仅仅提升 Levi-Civita 张量 $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ 的一个指标，例如，提升第一个(α)指标，则有如下关系

$$\varepsilon^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} = \eta^{\alpha\sigma}\varepsilon_{\sigma\beta\gamma\delta} = \begin{cases} -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}, & \alpha = 0 \\ \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}, & \alpha = i(1,2,3) \end{cases} \tag{2.7.32}$$

利用方程(2.5.3)和方程(2.7.29),很容易证明关系式(2.7.31)是正确的。再进一步,不难证明关系式(2.7.32)也是正确的,因为当且仅当 $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$(或 $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$)的所有指标互不相同时,Levi-Civita 张量才不为零,这时,必有一个是零指标,其他指标取 1,2,3。根据提升或下降指标的关系式

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = \eta_{\alpha\lambda}\eta_{\beta\sigma}\eta_{\gamma\rho}\eta_{\delta\kappa}\varepsilon^{\lambda\sigma\rho\kappa} \tag{2.7.33}$$

并注意到 $\eta_{00} = -1$, $\eta_{ii} = 1$,即可证明方程(2.7.31)的正确性。$\varepsilon^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}$是混合张量,在应用时需要特别注意。另外,在使用 $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$时要注意,它与定义式(2.7.29)正好反一个号。

张量代数的基本定理是,两个具有相同指标的张量,如果在一个坐标系中相等,那么,在任何一个由洛伦兹变换相联系的坐标系中也相等。例如,若$T^{\alpha}{}_{\beta} = S^{\alpha}{}_{\beta}$,则有

$$T'^{\alpha}{}_{\beta} = \Lambda^{\alpha}{}_{\gamma}\Lambda_{\beta}{}^{\delta}\,T^{\gamma}{}_{\delta} = \Lambda^{\alpha}{}_{\gamma}\Lambda_{\beta}{}^{\delta}\,S^{\gamma}{}_{\delta} = S'^{\alpha}{}_{\beta} \tag{2.7.34}$$

因此,张量方程具有特别优越的性质。如果我们在某个坐标系 x^{α} 中以张量方程的形式写出某种物理学规律,那么,这个物理学规律可以在任意坐标系 x'^{α} 之中写出,并且具有与在 x^{α} 系中的表述完全相同的形式,只要 x'^{α} 系与 x^{α} 系之间由洛伦兹变换联系。

关于张量的更为详细的讨论可参见 3.2 节,或有关文献(Schutz,1980;申文斌,2005)。

2.8 能量动量张量

下面引进能量动量张量的概念。能量动量张量是建立爱因斯坦方程不可缺少的量。

对于一组由 n 标记的质点粒子,质量的密度可定义为

$$\rho(\boldsymbol{x},t) = \sum_{n} m_n\delta^3(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_n(t)) \tag{2.8.1}$$

其中,m_n 是第 n 个粒子的质量,$\delta^3(\boldsymbol{x})$是三维狄拉克(Dirac)函数,它在 $\boldsymbol{x}=0$ 处为无穷大,但在整个三维空间中的积分为 1。以后还会遇

到四维狄拉克函数 $\delta^4(x^\alpha)$，它在 $x^\alpha=0$ 处为无穷大，但在整个四维空间中的积分为 1。质点组粒子的流定义为

$$\boldsymbol{J}(x,t) = \sum_n m_n \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_n(t)) \tag{2.8.2}$$

同理，对于由 n 标记的质点粒子组，第 n 个粒子的能量动量四维矢量 $p_n^\alpha(t)$ 的密度定义为

$$T^{\alpha 0}(\boldsymbol{x},t) = \sum_n p_n^\alpha(t)\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_n(t)) \tag{2.8.3}$$

p^α 的流定义为

$$T^{\alpha i}(\boldsymbol{x},t) = \sum_n p_n^\alpha(t)\frac{\mathrm{d}x_n^i(t)}{\mathrm{d}t}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_n(t)) \tag{2.8.4}$$

由于 $x_n^0(t)\equiv t$，$\mathrm{d}x_n^0/\mathrm{d}t\equiv 1$，因此，式(2.8.3)和式(2.8.4)可合写成

$$T^{\alpha\beta}(x) = \sum_n p_n^\alpha(t)\frac{\mathrm{d}x_n^\beta(t)}{\mathrm{d}t}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_n(t)) \tag{2.8.5}$$

$T^{\alpha\beta}$ 称为质点组的能量动量张量密度，也称应力张量密度，其中，T^{00} 是能量(物质)密度，T^{0i} 是动量密度，T^{ij} 是动量流密度。上式可以推广到物质连续分布区域中。由方程(2.6.9)和(2.6.10)，可以写出如下关系

$$\boldsymbol{p}_n = E_n\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}_n}{\mathrm{d}t} \tag{2.8.6}$$

由于 $\mathrm{d}x_n^0/\mathrm{d}t\equiv 1$，$p_n^0=E_n$，因此，上式又可写成四维矢量形式

$$p_n^\alpha = E_n\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}t} \tag{2.8.7}$$

顾及方程(2.8.7)，方程(2.8.5)可写为

$$T^{\alpha\beta}(x) = \sum_n \frac{p_n^\alpha p_n^\beta}{E_n}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_n(t)) \tag{2.8.8}$$

由上式可以看出，$T^{\alpha\beta}$ 具有对称性

$$T^{\alpha\beta}(x) = T^{\beta\alpha}(x) \tag{2.8.9}$$

为了证实前面所说的 $T^{\alpha\beta}$ 是张量，根据狄拉克 δ 函数的性质，由方程(2.8.5)可写出

$$T^{\alpha\beta}(x) = \sum_n \int dt' \delta(t - t') p_n^\alpha(t') \frac{dx_n^\beta(t')}{dt'} \delta^3(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_n(t'))$$

$$= \sum_n \int p_n^\alpha(t') dx_n^\beta(t') \delta^4(x - x_n(t'))$$

$$= \sum_n \int d\tau p_n^\alpha(\tau) \frac{dx_n^\beta(\tau)}{d\tau} \delta^4(x - x_n(\tau)) \qquad (2.8.10)$$

上式中，$d\tau$ 是不变量，$\delta^4(x - x_n(\tau))$ 是标量，$p_n^\alpha(\tau)$ 和 $dx_n^\beta(\tau)/d\tau$ 均为逆变四维矢量，因此，$T^{\alpha\beta}$ 是（二阶）逆变张量。这里需注意，$dx_n^\beta/d\tau$ 是（一阶）张量，但 dx_n^β/dt 却不是张量，因为 $dt = dx^0$ 是坐标 x^0 的增量，它与坐标系的变换有关。

下面考察能量动量张量 $T^{\alpha\beta}$ 的守恒律。由方程(2.8.3)和(2.8.4)得

$$\frac{\partial}{\partial x^i} T^{\alpha i}(\boldsymbol{x}, t) = \sum_n p_n^\alpha(t) \frac{dx_n^i(t)}{dt} \frac{\partial}{\partial x^i} \delta^3(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_n(t))$$

$$= -\sum_n p_n^\alpha(t) \frac{dx_n^i(t)}{dt} \frac{\partial}{\partial x_n^i} \delta^3(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_n(t))$$

$$= -\sum_n p_n^\alpha(t) \frac{\partial}{\partial t} \delta^3(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_n(t))$$

$$= -\sum_n \left\{ \frac{\partial}{\partial t} [p_n^\alpha(t) \delta^3(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_n(t))] - \frac{dp_n^\alpha(t)}{dt} \delta^3(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_n(t)) \right\}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t} T^{\alpha 0} + \sum_n \frac{dp_n^\alpha(t)}{dt} \delta^3(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_n(t)) \qquad (2.8.11)$$

顾及方程(2.6.7)，并令

$$G^\alpha(x) = \sum_n \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_n(t)) \frac{dp_n^\alpha(t)}{dt}$$

$$= \sum_n \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_n(t)) \frac{d\tau}{dt} f_n^\alpha(t) \qquad (2.8.12)$$

注意到 $\partial T^{\alpha\beta}/\partial x^\beta = \partial T^{\alpha i}/\partial x^i + \partial T^{\alpha 0}/\partial x^0$，则方程(2.8.11)可写成

$$\frac{\partial T^{\alpha\beta}(\boldsymbol{x},t)}{\partial x^{\beta}} = G^{\alpha} \tag{2.8.13}$$

其中 G^{α} 称为力密度。如果粒子是自由的，则 $p_n^{\alpha}(t)$ 是常数，$G^{\alpha}=0$；这时，$T^{\alpha\beta}$守恒，即有

$$\frac{\partial}{\partial x^{\beta}} T^{\alpha\beta}(x) = 0 \tag{2.8.14}$$

2.9　粒子的自旋

能量动量张量的一个重要用途是用来定义角动量和自旋。考虑一个孤立系统，这个系统不受外力作用，因此，系统总的能量动量张量 $T^{\alpha\beta}$守恒，即有（在方程（2.8.13）中令力密度 $G^{\alpha}=0$）

$$\frac{\partial}{\partial x^{\gamma}} T^{\beta\gamma} = 0 \tag{2.9.1}$$

构造另一张量

$$M^{\alpha\beta\gamma} \equiv x^{\alpha} T^{\beta\gamma} - x^{\beta} T^{\alpha\gamma} \tag{2.9.2}$$

对上式应用莱布尼兹求导法则，有（注意$\partial x^{\alpha}/\partial x^{\beta} = \delta^{\alpha}{}_{\beta}$）

$$\frac{\partial M^{\alpha\beta\gamma}}{\partial x^{\gamma}} = \left(\delta^{\alpha}_{\gamma} T^{\beta\gamma} + x^{\alpha}\frac{\partial T^{\beta\gamma}}{\partial x^{\gamma}}\right) - \left(\delta^{\beta}{}_{\gamma} T^{\alpha\gamma} + x^{\beta}\frac{\partial T^{\alpha\gamma}}{\partial x^{\gamma}}\right) \tag{2.9.3}$$

将方程（2.9.1）代入上式并注意到 $T^{\alpha\beta}$是对称张量，得

$$\frac{\partial M^{\alpha\beta\gamma}}{\partial x^{\gamma}} = T^{\beta\alpha} - T^{\alpha\beta} = 0 \tag{2.9.4}$$

因此，$M^{\alpha\beta\gamma}$也是守恒量。由此我们可以定义总的角动量

$$J^{\alpha\beta} = \int M^{\alpha\beta 0}\,\mathrm{d}^3 x = -J^{\beta\alpha} \tag{2.9.5}$$

此因 $M^{\alpha\beta\gamma}$对于指标 α 和 β 来说是反对称的，可由方程（2.9.2）直接验证。在方程（2.9.5）中，$\mathrm{d}^3 x$ 表示普通三维空间域中的积分体积元。$J^{\alpha\beta}$也是张量（这一点可根据 $T^{\alpha\beta}$的定义式（2.8.5）、$M^{\alpha\beta\gamma}$的定义式（2.9.2）以及方程（2.9.5）得到证实），并且不随时间变化：

$$\frac{\mathrm{d}J^{\alpha\beta}}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{2.9.6}$$

为了证实方程（2.9.6），由方程（2.9.5）和方程（2.9.4）得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(J^{\alpha\beta}) = \int \frac{\partial}{\partial t}M^{\alpha\beta 0}\mathrm{d}^3x = \int\left(\frac{\partial M^{\alpha\beta\gamma}}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial M^{\alpha\beta i}}{\partial x^i}\right)\mathrm{d}^3x$$

$$= -\int \frac{\partial M^{\alpha\beta i}}{\partial x^i}\mathrm{d}^3x \tag{2.9.7}$$

利用高斯定理,上述关于$\partial M^{\alpha\beta i}/\partial x^i$ 的体积分可以转化为关于 $M^{\alpha\beta i}$的面积分。当积分区域选得足够大时,在积分区域的边界面上 $M^{\alpha\beta i}$为零,因此,上述积分为零。

根据角动量的定义式(2.9.4)以及方程(2.9.2),得

$$J^{ij} = \int M^{ij0}\mathrm{d}^3x = \int(x^iT^{j0} - x^jT^{i0})\mathrm{d}^3x \tag{2.9.8}$$

按照 2.8 节的定义, T^{i0}是动量的第 i 个分量的密度,因而我们可以把 J^{23},J^{31},J^{12}分别看成角动量的第 1、2、3 分量。$J^{\alpha\beta}$的其他分量是

$$J^{00} = \int M^{000}\mathrm{d}^3x = 0 \tag{2.9.9}$$

$$J^{i0} = \int M^{i00}\mathrm{d}^3x = \int\mathrm{d}^3x(x^iT^{00} - tT^{i0})$$

$$= \int x^iT^{00}\mathrm{d}^3x - t\int T^{i0}\mathrm{d}^3x$$

$$= \int x^iT^{00}\mathrm{d}^3x - t\int\sum_n p_n^i(t)\delta^3(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_n(t))\mathrm{d}^3x$$

$$= \int x^iT^{00}\mathrm{d}^3x - tp^i(t) = -J^{0i} \tag{2.9.10}$$

其中

$$p^i(t) = \sum_n p_n^i(t) \tag{2.9.11}$$

上述这些分量没有什么明显的物理意义。若将坐标原点选在$t=0$时的"能量中心",则

$$\int x^iT^{00}\mathrm{d}^3x = \int x^i\rho\mathrm{d}^3x = 0 \tag{2.9.12}$$

它表示质心坐标乘以总质量。

角动量 $J^{\alpha\beta}$是反对称张量,在洛伦兹变换下具有性质

$$J'^{\alpha\beta} = \Lambda^\alpha{}_\gamma\Lambda^\beta{}_\delta J^{\gamma\delta} \tag{2.9.13}$$

但在平移变换 $x'^\alpha = x^\alpha + a^\alpha$ 之下具有特殊性

$$J'^{\alpha\beta} = J^{\alpha\beta} + a^\alpha p^\beta - a^\beta p^\alpha \tag{2.9.14}$$

为证实上式,由方程(2.9.5)和方程(2.9.2)得

$$J'^{\alpha\beta} = \int M'^{\alpha\beta0} d^3x' = \int (x'^{\alpha} T'^{\beta0} - x'^{\beta} T'^{\alpha0}) d^3x'$$

$$= \int [(x^{\alpha} + a^{\alpha}) T'^{\beta0} - (x^{\beta} + a^{\beta}) T'^{\alpha0})] d^3x' \quad (2.9.15)$$

由方程(2.8.3)可知,$T^{\alpha0}$在平移变换之下保持不变,故上式可写成

$$J'^{\alpha\beta} = \int (x^{\alpha} T^{\beta0} - x^{\beta} T^{\alpha0}) d^3x + a^{\alpha}\int T^{\beta0} d^3x - a^{\beta}\int T^{\alpha0} d^3x$$

$$= \int M^{\alpha\beta0} d^3x + (a^{\alpha} p^{\beta} - a^{\beta} p^{\alpha})$$

$$= J^{\alpha\beta} + a^{\alpha} p^{\beta} - a^{\beta} p^{\alpha} \quad (2.9.16)$$

上面第二等式中的两项分别用到了$M^{\alpha\beta\gamma}$的定义式(2.9.2)以及$T^{\alpha0}$的定义式(2.8.3)。

由方程(2.9.14)可知,角动量$J^{\alpha\beta}$由两部分组成,一部分是内禀角动量,即通常所说的自旋角动量,另一部分是轨道角动量。内禀角动量与平移变换无关,而轨道角动量则与平移变换有关。为了分离出$J^{\alpha\beta}$的内禀部分,定义一个自旋四维矢量(Weinberg,1972)

$$S_{\alpha} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} J^{\beta\gamma} U^{\delta} \quad (2.9.17)$$

其中,$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = -\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$(参见方程(2.7.31)),$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$是由方程(2.7.29)定义的 Levi-Civita 完全反对称张量(完全反对称张量是指任意两个指标互换之后张量的分量反一个正负号,参见3.2节),$U^{\alpha} \equiv p^{\alpha} / \sum\limits_{n} (-p_{n\beta} p_n^{\beta})^{1/2}$是系统的四维速度矢量(注意在光速单位制中速度是无量纲量)。

由于$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$是完全反对称的,尽管平移变换使$J^{\alpha\beta}$改变,但并不改变$S^{\alpha}$。为了完成这一论证,注意到方程(2.9.16),我们考察(注意 Levi-Civita 完全反对称张量具有坐标变换的不变性)以下方程

$$S'_{\alpha} = \frac{1}{2} \varepsilon'_{\alpha\beta\gamma\delta} J'^{\beta\gamma} U'^{\delta} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} (J^{\beta\gamma} + a^{\beta} p^{\gamma} - a^{\gamma} p^{\beta}) U'^{\delta} \quad (2.9.18)$$

由于$U'^{\delta} = U^{\delta}$(四维速度具有平移变换的不变性),同时注意到$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$的完全反对称性

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}a^{\beta}p^{\gamma} = \varepsilon_{\alpha\gamma\beta\delta}a^{\gamma}p^{\beta} = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}a^{\gamma}p^{\beta} \tag{2.9.19}$$

于是

$$S'_{\alpha} = \frac{1}{2}\varepsilon'_{\alpha\beta\gamma\delta}J'^{\beta\gamma}U'^{\delta} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}J^{\beta\gamma}U^{\delta} = S_{\alpha} \tag{2.9.20}$$

由于 $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$、$J^{\beta\gamma}$、$U^{\delta}$ 均为张量，因此，根据张量的构成规则，S_{α} 也必定是张量(一阶张量)，即四维矢量。

对于自由粒子，四维速度矢量 U^{α} 是常量

$$\frac{\mathrm{d}U^{\alpha}}{\mathrm{d}\tau} = 0 \tag{2.9.21}$$

由此，根据方程(2.9.20)，并注意到方程(2.9.6)，S_{α} 是常量，于是

$$\frac{\mathrm{d}S_{\alpha}}{\mathrm{d}\tau} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\left(\frac{\mathrm{d}J^{\beta\gamma}}{\mathrm{d}\tau}U^{\delta} + J^{\beta\gamma}\frac{\mathrm{d}U^{\delta}}{\mathrm{d}\tau}\right) = 0 \tag{2.9.22}$$

在系统的质心系中，$U^0 = 1$，$U^i = 0$。这时，由方程(2.9.17)得(注意到方程(2.7.29)和方程(2.7.31)以及 $J^{\alpha\beta}$ 的反对称性)：

$$S_0 = \frac{1}{2}\varepsilon_{0\beta\gamma\delta}J^{\beta\gamma}U^{\delta} = \frac{1}{2}\varepsilon_{0\beta\gamma0}J^{\beta\gamma}\cdot 1 = 0 \tag{2.9.23a}$$

$$S_1 = \frac{1}{2}\varepsilon_{1\beta\gamma\delta}J^{\beta\gamma}U^{\delta} = \frac{1}{2}\varepsilon_{1\beta\gamma0}J^{\beta\gamma}\cdot 1$$

$$= \frac{1}{2}(\varepsilon_{1230}J^{23} + \varepsilon_{1320}J^{32}) = J^{23} \tag{2.9.23b}$$

$$S_2 = \frac{1}{2}\varepsilon_{2\beta\gamma0}J^{\beta\gamma} = J^{31} \tag{2.9.23c}$$

$$S_3 = \frac{1}{2}\varepsilon_{3\beta\gamma0}J^{\beta\gamma} = J^{12} \tag{2.9.23d}$$

可见，S_{α} 的确是角动量，因为 J^{23}、J^{31}、J^{12} 分别是角动量 S_{α} 的1、2、3空间分量。这时，如下张量方程成立

$$U^{\alpha}S_{\alpha} = 0 \tag{2.9.24}$$

此因 $S_0 = 0$，$U^i = 0$。

由于方程(2.9.24)是张量方程(具有零秩的张量)，因此，在任意一个由洛伦兹变换联系的坐标系 x^{α} 中，方程(2.9.24)仍然成立，尽管这时四维速度 U^{α} 的空间分量 U_i 可以不为零。这也说明了张量方程的美妙之处：我们总是选一个较特殊的参考系，使得某种张量

方程的表述形式非常简单(如方程(2.9.24)),而这种张量方程形式适合于任意参考系,只要能找到从特殊参考系到任意参考系之间的坐标变换关系。以后会看到,张量的这种性质对于建立广义相对论具有不可估量的重要性。

在静止系中,一个处于静止状态的粒子的自旋只有三个空间分量 S_i。由于粒子处于静止状态(但有自旋!),四维速度矢量的空间分量 U_i 为零。于是,方程(2.9.24)在静止系中是成立的。当带自旋的粒子处于运动状态时,只要通过一个坐标变换,即可得到粒子的自旋应该满足的方程(见第 3 章)。

第 3 章

广义相对论基础

自然界普遍存在着一种引力作用,狭义相对论对此无能为力。在狭义相对论中,参考系必须是非加速系,而引力场具有一种独特的性质,它使任何物体都产生加速度。另外,从认识论角度来看,狭义相对论仍然允许优越参考系的存在,那就是做相互匀速直线运动的惯性参考系,只有在这类参考系中,物理学规律才是不变的。爱因斯坦(Einstein,1915a,b)认为,这至少在认识论方面是有缺陷的。从本质上来说,自然界的物理学规律应该适合于在任何参考系中描述。受马赫(Mach,1908)的影响,爱因斯坦在推广狭义相对性假设时写道(Einstein,1915a,b):“物理定律必须具有这样的一种性质,即适用于任何一种运动的参考系。”促使爱因斯坦作出这一假设的主要原因是,他发现一个加速参考系可以被一个静止在引力场中的参考系来代替。因此,没有理由认为哪个参考系优,哪个参考系劣。循着这条路线,爱因斯坦在 1907—1916 年建立了广义相对论(Einstein,1911,1915a,b;爱因斯坦,1976,中译本)。

3.1 等效原理

3.1.1 引力质量与惯性质量

早在16世纪初，伽利略就发现了自由落体定律：任何物体以同样的加速度下落。当时，并没有引力质量与惯性质量的概念。这两个概念的建立起源于牛顿。牛顿在第二运动定律（Newton，1687；牛顿，1992，中译本）

$$F = m_I a \tag{3.1.1}$$

中用到了一个质量 m_I，称为惯性质量；在万有引力定律

$$F = G\frac{Mm}{r^3}r = m_G\frac{GM}{r^3}r = m_G g \tag{3.1.2}$$

中也用到了一个质量 m_G，称为引力质量。在1.2.3节已提到，这两个质量可能并不相同。但当时牛顿的实验以及后来的实验均没有发现它们之间的差别（秦荣先，阎永廉，1987）。实际上，如果承认伽利略自由落体定律，并且假定引力质量与惯性质量均不随速度的变化而变化，那么，引力质量与惯性质量必定等效。这种等效性可从方程（3.1.1）和（3.1.2）的比较在牛顿力学概念下得到论证。但在狭义相对论中，惯性质量是随速度的增加而增加的。现在要问：引力质量是否也随速度的增加而增加？如果是否定的，那么，即使在均匀引力场中，质体的下落加速度也不能保持恒定，更谈不上引力质量与惯性质量等效的问题。爱因斯坦的升降机理想实验很能说明问题。爱因斯坦指出，当你乘坐封闭的升降机随其自由下落时，你将感受不到引力场的存在，你所受到的引力作用正好被自由下落加速度产生的惯性力所抵消。如果我们接受这个理想实验，那么，引力质量必定按与惯性质量同样的规律随速度增加而增大。因此，引力质量与惯性质量等效。在自由下落的升降机中，引力场好像不存在了。确切地说，在自由下落升降机中，你感觉不到是处于静止状态还是运动状态。这一表述，称为弱等效原理，因为这只不过是引力质量与惯性质量等

效这一命题(参见 1.2.3 节)的复述而已。

3.1.2 等效原理的精确表述

在非均匀引力场(比如地球引力场)中,惯性力与引力并不能完全抵消。即使在自由降落的升降机中,原则上也能“感觉到”引力场的存在,因为惯性力只沿一个方向,而非均匀引力场的方向则是不同的。但如果把研究对象限定在足够小的邻域,就有可能使惯性力与引力完全抵消。为此,设想一个质点在引力场中运动,质点所受到的引力沿一个确定的方向 $\boldsymbol{n}$,它在 $\boldsymbol{g}$ 的作用下做加速运动,由此产生的惯性力的方向与 $\boldsymbol{n}$ 正好相反,因此二者抵消。为此,只要我们把注意力集中在场变化很小的空间和时间范围之内,惯性力与引力就可以足够精确地抵消。基于上述考虑,等效原理可表述如下(Weyl,1970;Weinberg,1972):

> 在任意引力场中的每一个时空点,有可能选择一个“局部惯性系”,使得在所讨论的那一点附近的充分小的邻域内,自然规律的形式与在没有引力场存在时的惯性系中的表现形式完全相同。

由于狭义相对论在惯性系中有效,因此,根据等效原理,只要在引力场中能够选择出“局部惯性系”(参见图 3.1.1),那么,就可以在这个局部惯性系中写出满足狭义相对论的物理定律。设想在局部惯性系中选定了一坐标系 ξ^α,那么,可将它表示成某个一般坐标系 x^α 的函数(参见图 3.1.1):

$$\xi^\alpha = \xi^\alpha(x) \tag{3.1.3}$$

当一个物理学规律(比如质点的运动方程)用局部惯性坐标系 ξ^α 表示出来之后,可以根据方程(3.1.3)反求出 x^α,从而得到该物理学规律在一般坐标系 x^α 中的表述。当然,为了能从方程(3.1.3)解出 x^α,一般坐标系 x^α 必须满足一定的条件。根据隐函数定理,只要雅可比(Jacobi)行列式 $|\partial\xi^\alpha/\partial x^\mu|$ 处处不为零,则可由方程(3.1.3)解出 x^α。

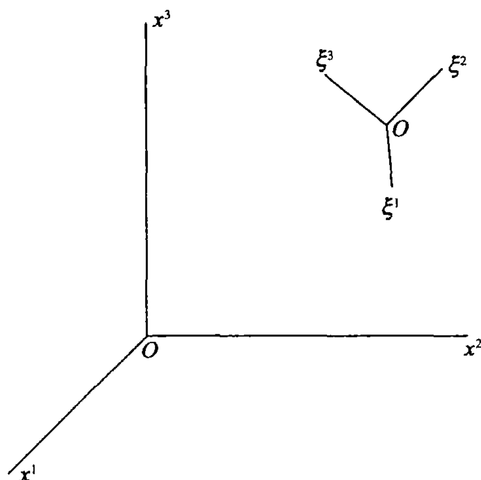


图 3.1.1　图中只画出了空间坐标，时间坐标没有画出. $O-x^0x^1x^2x^3$ 是一般坐标系，$O-\xi^0\xi^1\xi^2\xi^3$ 是随粒子一起运动(但未必固结)的局部惯性系；两个坐标系之间的坐标关系可以形式地由方程(3.1.3)表示

3.1.3　度规张量与粒子在引力场中的运动

根据前面给出的等效原理，我们来研究粒子在引力场中的运动方程。考察在引力场中做自由运动的一个粒子。由于这个粒子是自由运动的，因此，随同该粒子一起运动的局部参考系可构成局部惯性系 ξ^α。在这个局部惯性系中，狭义相对论有效。在粒子所在的局部惯性系中，粒子不受外力作用，因此，粒子的运动方程是一直线

$$\frac{d^2\xi^\alpha}{d\tau^2}=0 \tag{3.1.4}$$

其中原时 $d\tau$ 由下式给出

$$d\tau^2=-\eta_{\alpha\beta}d\xi^\alpha d\xi^\beta \tag{3.1.5}$$

现在我们要在任意参考系 x^α 中写出粒子的运动方程，这个参考系可以是非惯性系，比如，可以选为原点在地球质心的任意笛卡儿坐标系。就现实世界而言，总可以建立局部惯性坐标系 ξ^α 与一般坐标

系 x^α 之间的函数关系，即式(3.1.3)。于是，利用复合函数以及莱布尼兹求导法则，方程(3.1.4)可以改写为

$$0=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\mathrm{d}\xi^\alpha}{\mathrm{d}\tau}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\beta}\frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}\tau}\right)$$

$$=\frac{\partial^2\xi^\alpha}{\partial x^\beta\partial x^\gamma}\frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\gamma}{\mathrm{d}\tau}+\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\beta}\frac{\mathrm{d}^2x^\beta}{\mathrm{d}\tau^2}\tag{3.1.6}$$

上式两边同乘以$\frac{\partial x^\lambda}{\partial\xi^\alpha}$，注意到

$$\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\beta}\frac{\partial x^\lambda}{\partial\xi^\alpha}=\frac{\partial x^\lambda}{\partial x^\beta}=\delta^\lambda{}_\beta\ .\tag{3.1.7}$$

得

$$\frac{\mathrm{d}^2x^\lambda}{\mathrm{d}\tau^2}+\frac{\partial x^\lambda}{\partial\xi^\alpha}\frac{\partial^2\xi^\alpha}{\partial x^\beta\partial x^\gamma}\frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\gamma}{\mathrm{d}\tau}=0\tag{3.1.8}$$

令

$$\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}=\frac{\partial x^\lambda}{\partial\xi^\alpha}\frac{\partial^2\xi^\alpha}{\partial x^\mu\partial x^\nu}\tag{3.1.9}$$

则方程(3.1.8)可写成

$$\frac{\mathrm{d}^2x^\lambda}{\mathrm{d}\tau^2}+\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau}=0\tag{3.1.10}$$

由方程(3.1.9)定义的 $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$称为仿射联络，也称为 Christoffel 符号。值得注意的是，仿射联络 $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$不是张量，这可根据张量的定义(见2.7节)以及定义式(3.1.9)直接证明(一般性的证明见3.2.7节)。方程(3.1.10)给出了在一般坐标系 x^α 中考察时粒子在引力场中的运动方程。当不存在引力时，粒子的运动轨迹是一条直线

$$\frac{\mathrm{d}^2x^\lambda}{\mathrm{d}\tau^2}=0\tag{3.1.11}$$

这里隐含了一个假设：前面所选取的“一般坐标系 x^α”并非非常一般，它至少相对于遥远的星系无旋转。

于是，由方程(3.1.10)可以看出，$\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$具有引力特性。当不存在引力时，$\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}=0$(在无旋转参考系中)。注意 $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$关于指标$\mu$ 和ν是对称的，这可以根据定义式(3.1.9)看出。不过，Christoffel 符号 $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$还不能描述引力的本质属性；引力的本质属性将由黎曼

(Riemann)张量描述,详见3.2.8节和3.3.1节。

由方程(3.1.5)给出的原时 $\mathrm{d}\tau$ 按如下方式变换

$$\mathrm{d}\tau^2 = -\eta_{\alpha\beta}\mathrm{d}\xi^\alpha\mathrm{d}\xi^\beta = -\eta_{\alpha\beta}\left(\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}\mathrm{d}x^\mu\right)\left(\frac{\partial\xi^\beta}{\partial x^\nu}\mathrm{d}x^\nu\right)$$
$$= -g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu \tag{3.1.12}$$

其中

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial\xi^\beta}{\partial x^\nu} \tag{3.1.13}$$

称为度规张量,它是对称的二阶协变张量,其对称性是明显的。

至于张量性,则因方程(3.1.13)右边的每一乘积因子都是张量。需要注意的是,不论是在局部惯性系 ξ^α 中,还是在一般坐标系 x^α 中,原时 $\mathrm{d}\tau$ 是不变量。

对于光子,由于其运动规律由方程

$$\mathrm{d}\tau^2 = -\eta_{\alpha\beta}\mathrm{d}\xi^\alpha\mathrm{d}\xi^\beta = 0 \tag{3.1.14}$$

给出(参见2.5.2节),因此,光子的运动方程不能直接应用方程(3.1.4)或方程(3.1.10)。但光子在 ξ^α 系中同样走一条直线,因此,其运动方程可写成

$$\frac{\mathrm{d}^2\xi^\alpha}{\mathrm{d}\sigma^2} = 0 \tag{3.1.15}$$

其中 σ 为任意的不同于 τ 的参数。于是,根据同样的推导,在一般坐标系 x^α 中,光子的运动方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2x^\lambda}{\mathrm{d}\sigma^2} + \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\sigma}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\sigma} = 0 \tag{3.1.16}$$

附以条件

$$\frac{\mathrm{d}\tau^2}{\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}\sigma} = -g_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\sigma}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\sigma} = 0 \tag{3.1.17}$$

其中方程(3.1.16)和(3.1.17)中的 $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$ 和 $g_{\mu\nu}$ 仍然分别由方程(3.1.9)和方程(3.1.13)定义。

在引力场中,由于 $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$ 不为零,因此,一般说来,光子行进的路线是一曲线,曲线由方程(3.1.16)给出。特别地,光子行进一段距离 $\mathrm{d}x$ 所经历的时间 $\mathrm{d}t$ 可由方程(3.1.17)导出。为此,由方程(3.1.17)得

$$0 = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu = g_{00}\mathrm{d}t^2 + g_{i0}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}t + g_{0i}\mathrm{d}t\mathrm{d}x^i + g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j$$
$$= g_{00}\mathrm{d}t^2 + 2g_{i0}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}t + g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j \tag{3.1.18}$$

其中 i 和 j 遍历 1,2,3 求和(对相同的上下指标求和)。表达式(3.1.18)是关于 $\mathrm{d}t$ 的一元二次方程,很容易求出有意义的解:

$$\mathrm{d}t = \frac{1}{g_{00}}\left\{ -g_{i0}\mathrm{d}x^i - \left[(g_{i0}g_{j0} - g_{00}g_{ij})\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j \right]^{1/2} \right\} \tag{3.1.19}$$

另外一个解不符合实际,这只需考察将度规张量 $g_{\mu\nu}$ 用闵可夫斯基度规张量 $\eta_{\mu\nu}$ 代替的特殊情形就可以证实。

假定光子从 A 到 B 行进的路径是 L,则可由方程(3.1.19)沿路径 L 积分得到光子经由这条路径所花费的时间 t_{AB}。在推算 VLBI(甚长基线干涉测量)中的时间延迟模型时需要用到这一表达式。

前面已经指出,根据考察质点在引力场中的方程(3.1.10),可以推断仿射联络 $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$ 具有引力性质,当不存在引力时 $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$ 为零。因此,可以认为,决定引力场的量是 $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$。正如前面指出的,这里的论述基于一个假定,参考系 x^α 相对遥远的星系无旋转。严格的论述参见 3.2.8 节和 4.7.2 节。从方程(3.1.12)可以看出,原时间隔 $\mathrm{d}\tau$ 由度规张量 $g_{\mu\nu}$ 来决定。$g_{\mu\nu}$ 具有什么性质呢?我们先给出 $g_{\mu\nu}$ 与 $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$ 之间的关系之后再下结论。由方程(3.1.13)得

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = \frac{\partial}{\partial x^\lambda}\left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu}\eta_{\alpha\beta}\right) = \left(\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\lambda \partial x^\mu}\frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial^2 \xi^\beta}{\partial x^\lambda \partial x^\nu}\right)\eta_{\alpha\beta} \tag{3.1.20}$$

在方程(3.1.9)两边同乘以 $\frac{\partial \xi^\rho}{\partial x^\lambda}$,则有

$$\frac{\partial \xi^\rho}{\partial x^\lambda}\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} = \frac{\partial \xi^\rho}{\partial x^\lambda}\frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha}\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = \frac{\partial^2 \xi^\rho}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \tag{3.1.21}$$

将此式代入前面的式子,并顾及方程(3.1.13),得

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = \left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\rho}\Gamma^\rho{}_{\lambda\mu}\frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\rho}\Gamma^\rho{}_{\lambda\nu}\right)\eta_{\alpha\beta} = g_{\rho\nu}\Gamma^\rho{}_{\lambda\mu} + g_{\rho\mu}\Gamma^\rho{}_{\lambda\nu} \tag{3.1.22}$$

由方程(3.1.22),注意到 $g_{\mu\nu}$ 和 $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$ 关于指标 μ 和 ν 是对称的,得

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}+\frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu}-\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu}=(g_{\rho\nu}\Gamma^\rho{}_{\lambda\mu}+g_{\rho\mu}\Gamma^\rho{}_{\lambda\nu})+(g_{\rho\nu}\Gamma^\rho{}_{\mu\lambda}+g_{\rho\lambda}\Gamma^\rho{}_{\mu\nu})$$

$$-(g_{\rho\lambda}\Gamma^\rho{}_{\nu\mu}+g_{\rho\mu}\Gamma^\rho{}_{\nu\lambda})$$

$$=2g_{\rho\nu}\Gamma^\rho{}_{\lambda\mu}\tag{3.1.23}$$

定义 $g_{\rho\nu}$的逆 $g^{\rho\nu}$,满足

$$g^{\rho\sigma}g_{\rho\nu}=\delta^\sigma{}_\nu\tag{3.1.24}$$

则由方程(3.1.23)和(3.1.24)得

$$\frac{1}{2}g^{\sigma\nu}\left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}+\frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu}-\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu}\right)=g^{\sigma\nu}g_{\rho\nu}\Gamma^\rho{}_{\lambda\mu}=\delta^\sigma{}_\rho\Gamma^\rho{}_{\lambda\mu}=\Gamma^\sigma{}_{\lambda\mu}\tag{3.1.25}$$

故

$$\Gamma^\sigma{}_{\lambda\mu}=\frac{1}{2}g^{\sigma\nu}\left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}+\frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu}-\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu}\right)\tag{3.1.26}$$

或写成容易辨认的形式

$$\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}=\frac{1}{2}g^{\sigma\lambda}\left(\frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu}+\frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu}-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}\right)\tag{3.1.27}$$

由方程(3.1.24)定义的逆 $g^{\rho\sigma}$存在,并且可以写成如下形式

$$g^{\rho\sigma}\equiv g^{\sigma\rho}=\eta^{\alpha\beta}\frac{\partial x^\rho}{\partial\xi^\alpha}\frac{\partial x^\sigma}{\partial\xi^\beta}\tag{3.1.28}$$

欲证明这一点,只要考察一下 $g_{\rho\sigma}$的定义式(3.1.13)并注意方程(2.7.5)就很清楚了。

方程(3.1.27)表明,度规张量 $g_{\mu\nu}$具有引力势的特性。

3.1.4　运动方程的牛顿极限

我们曾经根据等效原理写出了粒子在引力场中的运动方程(3.1.10)

$$\frac{d^2x^\lambda}{d\tau^2}+\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}=0\tag{3.1.29}$$

下面考察在弱的定态引力场中的牛顿极限。一个场是弱的,是指场源的质量满足如下关系

$$\frac{GM}{R} << 1 \tag{3.1.30}$$

其中 R 是质体的平均半径。

这里需注意，由于我们采用了光速单位制，GM/R 是无量纲量。在国际单位制 SI 中，$G = 6.67428 \times 10^{-11}\,\mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{kg}^{-1} \cdot \mathrm{s}^{-2}$（Mohr et al.,2008）。在光速单位制中，长度与时间具有同样的量纲，因此，G 的量纲是 $\mathrm{m} \cdot \mathrm{kg}^{-1}$。

一个场是定态的，是指该场不随时间变化。由于场是弱的，度规张量 $g_{\mu\nu}$ 可以表示成

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \qquad |h_{\mu\nu}| << 1 \tag{3.1.31}$$

在没有引力场存在时，属于闵可夫斯基（平直）空间，故有 $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$。当粒子的运动速度远小于光速时，下述关系成立

$$\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\tau} << \frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}\tau} \equiv \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} \qquad (i = 1,2,3) \tag{3.1.32}$$

于是，方程（3.1.10）可写成

$$\frac{\mathrm{d}^2x^\lambda}{\mathrm{d}\tau^2} + \Gamma^\lambda{}_{00}\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 = 0 \tag{3.1.33}$$

将方程（3.1.31）代入方程（3.1.27），得

$$\Gamma^\sigma{}_{00} = \frac{1}{2}g^{\sigma\lambda}\left(\frac{\partial h_{\lambda 0}}{\partial t} + \frac{\partial h_{\lambda 0}}{\partial t} - \frac{\partial h_{00}}{\partial x^\lambda}\right) \tag{3.1.34}$$

因为场是定态的，$\dfrac{\partial h_{\lambda 0}}{\partial t} = 0$。取至一阶项，得

$$\Gamma^\lambda{}_{00} = -\frac{1}{2}\eta^{\lambda\sigma}\frac{\partial h_{00}}{\partial x^\sigma} \tag{3.1.35}$$

于是，方程（3.1.33）变为

$$\frac{\mathrm{d}^2x^\lambda}{\mathrm{d}\tau^2} - \frac{1}{2}\eta^{\lambda\sigma}\frac{\partial h_{00}}{\partial x^\sigma}\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 = 0 \tag{3.1.36}$$

上面的方程也可以写成

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}\tau^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 \nabla h_{00}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2t}{\mathrm{d}\tau^2} = 0 \tag{3.1.37}$$

其中 ∇ 是梯度算符。

由上面的第二个方程，$\mathrm{d}t/\mathrm{d}\tau$ = 常数，可取为 1，或将常数因子吸收到 h_{00} 之中。因此，第一个方程又可写成

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{1}{2}\nabla h_{00} \tag{3.1.38}$$

上述方程对应的牛顿结果是

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t^2} = -\nabla\varphi \tag{3.1.39}$$

其中 φ 是牛顿引力位。

对于均质圆球产生的位，可以写出

$$\varphi = -\frac{GM}{r} \tag{3.1.40}$$

根据对应原理，在低速运动以及弱场条件下，相对论的一级近似应该给出牛顿结果。因此，比较方程(3.1.38)和方程(3.1.39)得

$$h_{00} = -2\varphi + C \tag{3.1.41}$$

其中 C 是任意常数。

在无限远处，$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$，因此 $h_{00} = 0$。若规定在无限远处的位 φ 为零，那么，$C = 0$，从而得到 $h_{00} = -2\varphi$。根据方程(3.1.31)并顾及闵可夫斯基度规 $\eta_{\mu\nu}$ 的定义(参见 2.5.1 节)，便可得到 $g_{\mu\nu}$ 的 00 分量

$$g_{00} = -(1 + 2\varphi) \tag{3.1.42}$$

3.1.5　引力频移效应

考察原时间隔

$$\mathrm{d}\tau^2 = -g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu \tag{3.1.43}$$

我们知道，原时间隔是不变量，与坐标系的选取无关。但坐标分量 $x^0 \equiv t$ 却与坐标系的选择以及时空位置有关。取某时空瞬间的两点 P_1 和 P_2，坐标分别为 x_1^α，x_2^α，则得

$$\mathrm{d}\tau^2 = -g_{\mu\nu}(x_1)\mathrm{d}x_1^\mu\mathrm{d}x_1^\nu = -g_{\mu\nu}(x_2)\mathrm{d}x_2^\mu\mathrm{d}x_2^\nu \tag{3.1.44}$$

或写成

$$g_{\mu\nu}(x_1)\frac{\mathrm{d}x_1^\mu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x_1^\nu}{\mathrm{d}\tau} = g_{\mu\nu}(x_2)\frac{\mathrm{d}x_2^\mu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x_2^\nu}{\mathrm{d}\tau} \tag{3.1.45}$$

上述方程给出了处于 P_1 和 P_2 两处时钟的运行速率之间的关系，这两个时钟可以是处于运动状态的。

当两个时钟分别静止在 P_1 点和 P_2 点时，由于 $\mathrm{d}x_1^i/\mathrm{d}\tau=0$，$\mathrm{d}x_2^i/\mathrm{d}\tau=0(i=1,2,3)$，我们便得到如下简单关系

$$g_{00}(x_1)\left(\frac{\mathrm{d}t_1}{\mathrm{d}\tau}\right)^2=g_{00}(x_2)\left(\frac{\mathrm{d}t_2}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 \tag{3.1.46}$$

或

$$g_{00}(x_1)\mathrm{d}t_1^2=g_{00}(x_2)\mathrm{d}t_2^2 \tag{3.1.47}$$

$\mathrm{d}t_1$ 和 $\mathrm{d}t_2$ 分别可理解为静止在 P_1 处和 P_2 处的时钟的单位秒长。对于弱场，$g_{00}=-1-2\varphi$，因此，方程(3.1.47)可写成

$$[1+2\varphi(x_1)]\mathrm{d}t_1^2=[1+2\varphi(x_2)]\mathrm{d}t_2^2 \tag{3.1.48}$$

或写成

$$\frac{\mathrm{d}t_1}{\mathrm{d}t_2}=\left[\frac{1+2\varphi(x_2)}{1+2\varphi(x_1)}\right]^{1/2}\approx 1+\varphi(x_2)-\varphi(x_1) \tag{3.1.49}$$

由上式可以看出，处于引力位较高处的时钟的单位秒长较短，这也意味着处于较高引力位处的时钟的运行速率较快。由于频率 f 被定义为单位秒所历经的周期数，因此，由方程(3.1.49)得

$$\frac{f_2}{f_1}=\frac{\mathrm{d}t_1}{\mathrm{d}t_2}=1+\varphi(x_2)-\varphi(x_1) \tag{3.1.50}$$

一般情况下，f_1 与 f_2 的差异很小，可以将上式写成

$$\Delta f=f_2-f_1=f[\varphi(x_2)-\varphi(x_1)] \tag{3.1.51}$$

其中，f 取 f_1 和 f_2 的中数，或取 f_1 或 f_2。

方程(3.1.51)表明，处于引力位较高的时钟的振动频率较快。因此，当原子发射的电磁波由高位向低位传播时，在低位处的接收者(与自身原子发射的谱线相比)会发现电磁波的频率增大了，此即引力紫移；反之，由低位向高位传播时，则会发现频率减小，此即引力红移。

实际上，引力频移效应可以按完全不同的观点推导出来(Misner et al.,1973;Shen,1998)。设想最初发射出来的光子具有质量 m，光子从 Q 点向 P 点发射。假定在发射点 Q 处光子的频率为 f，那么，根据 Planck 的量子理论(Planck,1900,1901)，具有频率 f 的光子同时

具有能量

$$E = hf \tag{3.1.52}$$

其中，h 是 Planck 常数，$h = 6.626 \times 10^{-34} \mathrm{J \cdot s}$。

假定 Q 处的引力位为 φ_Q，那么，光子在 Q 处具有总能量

$$W_Q = hf + m\varphi_Q \tag{3.1.53}$$

其中 f 是光子在 Q 处所具有的频率。这里，我们将光子设想成具有静止质量 m 的粒子（这仅仅是一个虚设）。

当光子到达 P 点时，由于引力位差作用，光子的频率变为 f'（参见图 3.1.2）。因此，在 P 点，光子的总能量为

$$W_P = hf' + m\varphi_P \tag{3.1.54}$$

根据能量守恒原理，应该有 $W_Q = W_P$，因此

$$hf + m\varphi_Q = hf' + m\varphi_P \tag{3.1.55}$$

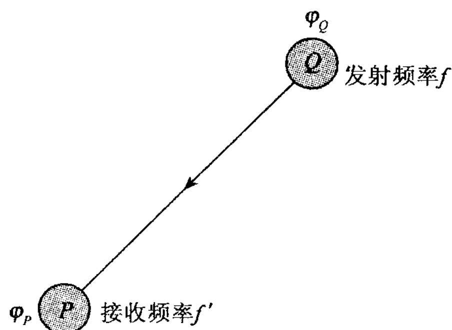


图 3.1.2　位于 Q 处（引力位为 φ_Q）的原子发射出具有频率 f 的光信号，位于 P 处（引力位为 φ_P）的接收机接收到的频率为 f'

由于光子具有质量 m，因此，具有能量

$$A = m \quad \text{（注意光速单位制，} c^2 = 1\text{）} \tag{3.1.56}$$

于是，根据 Planck 理论（Planck，1900），则有

$$hf = A = m \tag{3.1.57}$$

将方程（3.1.57）代入方程（3.1.55），得

$$hf' - hf = hf(\varphi_Q - \varphi_P) \tag{3.1.58}$$

即

$$\Delta f = f' - f = (\varphi_Q - \varphi_P) f \qquad (3.1.59)$$

比较方程(3.1.59)与方程(3.1.51)可以发现,二者完全相同。

若对探讨引力频移以及时间的本质性问题感兴趣,可参阅(Shen et al., 1993a,b; 申文斌等, 1993, 1994; 申文斌, 1994)。关于引力频移以及时钟运行速率受引力场的影响的实验检验,可参阅以下作者在不同时期的实验结果,包括:Will(1981), Brault(1973), Snider(1972), Popper(1954), Bertotti et al. (1962), Greenstein et al. (1971), Cranshaw et al. (1960), Pound and Rebka(1959, 1960a,b), Pound and Snider(1965), Hafele and Keating(1972a,b), Alley(1977), Jenkins(1969), Vessot et al. (1980), Turneaure et al. (1983), Krisher et al. (1990, 1993),详见表 3.1.1。

表 3.1.1 引力频移实验结果

实验者	年代	结果(观测值与理论值的比值)
Pound and Rebka	1959,1960	1.05 ±0.10
Cranshaw et al	1960	0.96 ±0.45
Pound and Snider	1965	0.9990 ±0.0076
Hafele and Keating	1971	10%精度内相符
Greenstein et al	1971	7%精度内相符
Snider	1972	1.01 ±0.06
Alley	1977	2%的精度内相符
Vessot et al	1980	观测值与理论值相差 7×10^{-5}
Krisher et al	1990	1%的精度内相符
Krisher et al	1993	0.5%的精度内相符

3.1.6 广义协变原理

在引力场中,不仅时钟的运行速率与引力位有关(因而与所在的地点有关),而且量杆也随引力位的不同而变(这在以后论证)。

因此,用一个标准时钟和量杆来度量时间和空间的企图就行不通了。然而,自然规律是客观存在的,有没有办法描述呢? 一种设想就是,不必使用统一的时钟和量杆,自然规律应该适合于用任意一种坐标系来描述。按照爱因斯坦(1916)的话说:"普遍自然定律,应当用对一切坐标系都适用的方程来描述,也就是说,普遍自然定律对于任何变换都是协变的(广义协变性)。"不过,这样一来,可能会引起争论:如果没有统一的量杆和时钟,如何比较不同参考系中的测量结果呢? 关于这个问题,我们在第 4 章专门研究。

实际上,广义协变性原理并没有给出新的物理内容,正如 Kretschmann(1917)所指出的,任何方程都可被做成广义协变的,只要在任意一个坐标系中把它写成张量形式,然后再算出它在任意其他坐标系中是什么样子就行了。比如,在局部惯性系中可以写出直线运动方程

$$\frac{\mathrm{d}^2\xi^\alpha}{\mathrm{d}\tau^2} = 0 \tag{A}$$

由 ξ^α 变换到任意坐标系 x^α 之后,上述直线方程就变成了

$$\frac{\mathrm{d}^2x^\lambda}{\mathrm{d}\tau^2} + \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau} = 0 \tag{B}$$

有引力场存在时,$\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} \neq 0$,因此,上述方程一般地表示一条曲线,而不是直线。由(A)到(B)是广义协变的,但(B)与(A)不同。由此可见,广义协变原理并不像狭义相对性原理那样是一种不变的陈述。从本质上来说,广义协变的意义在于引入某种物理效应(比如引力效应)或消除这种物理效应。由(A)变到(B),引入了引力效应;反过来,由(B)变到(A),则消除了引力效应。需要强调指出,这种"引入"或"消除"并不是没有条件的,只有当所研究的范围远远小于场的变化尺度(即局限于足够小的邻域)时,广义协变才适用。另一方面,上面所说的"引入物理效应"或"消除物理效应"并不是完全真实的,而只是一种表观形式。在闵可夫斯基空间中,我们可以通过引进旋转坐标系或加速参考系构造出惯性力(很类似于引力)。但从整个空间结构来看,我们并没有真正从本质上引进什么新东西。引进不同的参考系,仅仅是观测者以不同的方式考察自然定律而已。

3.2 近代数学物理几何方法

3.2.1 拓扑空间

拓扑空间的概念最先由 Hausdorff(1914)引进。引进拓扑空间的目的是为了将很广泛的几何研究对象进行统一分类以便于研究(Schutz,1980)。从拓扑学角度来看,一支粉笔与一个实心球没有什么分别,因为由后者(或前者)可以连续形变而得到前者(或后者)。这就是说,粉笔与实心球是拓扑等价的,这不仅在局部是如此,在整体也是如此。值得注意的是,一个二维球面 $\mathbf{S}^2$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \tag{3.2.1}$$

上的任意一个开邻域(开邻域意味着开集,也就是说,对于该邻域中的任何一点 x 都可以找到一个包含 x 的更小的邻域,该邻域完全包含在原来的邻域之中),与二维平面在拓扑结构上是相同的。但整个球面 $\mathbf{S}^2$ 与二维平面具有完全不同的拓扑结构。如果把 $\mathbf{S}^2$ 和二维平面设想成两个拓扑空间 X 和 Y,那么, X 与 Y 不等价。要证明这一点很容易。设想用一个刚性圈 C 切割球面 $\mathbf{S}^2$ 和平面 $\mathbf{E}^2$(切割之意是指 C 上的每一点同时与 $\mathbf{S}^2$ 或 $\mathbf{E}^2$ 中的一个环接触),其结果是,$\mathbf{S}^2$ 经切割后与两个圆盘等价,而 $\mathbf{E}^2$ 经切割后与一个圆盘和一个开圆环等价。因此,有局部拓扑与整体拓扑之分。$\mathbf{S}^2$ 的局部类似于平面,但整体与平面不同。

任何一个点集,都可以视为某种空间对象,当赋予这些对象以特殊的结构时,就构成了具有某种特殊性质的空间。比如,由全体三维实数组(x_1,x_2,x_3)构成的集合是某种空间,通常称为三维矢量代数空间。在赋予(x_1,x_2,x_3)通常的欧几里得距离概念

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x_1^2 + \mathrm{d}x_2^2 + \mathrm{d}x_3^2 \tag{3.2.2}$$

之后, $\mathbf{R}^3$ 就变成了三维欧氏空间 $\mathbf{E}^3$。如果赋予不同的距离概念,就得到不同的空间。

一个空间要能成为向量(代数)空间,还必须附加群结构以及代数结构。如果一个空间(集合)G 中的元素(点),在一个二元运算 ·

之下（“·”也许是加法或减法算符，也许是乘法或除法算符，也许是其他什么算符），满足如下公理（熊全淹，1984）：

(i) 结合律：$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$，对于任意 $x, y, z \in G$；

(ii) 右单元：$x \cdot e = x$，存在 $e \in G$；

(iii) 右逆元：$x \cdot x^{-1} = e$，对于任意 $x \in G$，存在 $x^{-1} \in G$，

则称 G 为空间群，简称群。一个群 G 如果满足下面的公理

(iv) $x \cdot y = y \cdot x$，对于任意 $x, y \in G$，

则将该群称为阿贝尔群。

实数域 R 在普通加法运算之下构成阿贝尔群，在普通减法运算之下不构成群，在普通乘法或除法运算之下也不构成群。所有 $n \times n$ 满秩矩阵所构成的空间 $A^{n \times n}$ 在普通矩阵乘法之下构成群，但不是阿贝尔群；在普通加法或减法运算之下不构成群。

一个空间 $\mathbf{V}$ 如果在普通加法运算之下构成阿贝尔群，其中的元与实数之间定义了普通乘法，满足如下公理（熊全淹，1984）：

(i) $a(x+y) = ax + ay$，对于任意 $a \in R$，$x, y \in \mathbf{V}$；

(ii) $(a+b)x = ax + bx$，对于任意 $a, b \in R$，$x \in \mathbf{V}$；

(iii) $(ab)x = a(bx)$，对于任意 $a, b \in R$，$x \in \mathbf{V}$；

(iv) $1x = x$，对于任意 $x \in \mathbf{V}$，其中 $1 \in R$，

则构成一个向量空间。

一般地，只要给空间 $\mathbf{R}^3$ 赋予了度量 d（d 称为距离或度量函数），满足

(i) $d(x, y) \geqslant 0$，$\forall$（任意）$x, y \in \mathbf{R}^3$

(ii) $d(x, y) + d(y, z) \geqslant d(x, z)$，$\forall x, y \in \mathbf{R}^3$

则称赋予了度量 d 的空间 $\mathbf{R}^3$ 为度量空间。

下面给出拓扑空间的定义（Blackett，1967；Armstrong，1983）。设有一个集合 $\boldsymbol{X}$，并且对于 $\boldsymbol{X}$ 中的每一点 x 选定由 $\boldsymbol{X}$ 中的元构成的开集（邻域），满足

(a) x 在它自己的邻域中；

(b) x 的任何两个邻域的交集为 x 的一个邻域；

(c) 若 N 是 x 的邻域，U 为包含 N 的 $\boldsymbol{X}$ 的子集，则 U 是 x 的邻域；

(d)若 N 是 x 的邻域,并用 $\overset{0}{N}$ 表示集合 $\{z \in N \mid N$ 是 z 的邻域$\}$,则 $\overset{0}{N}$ 也是 x 的邻域(集合 $\overset{0}{N}$ 叫做 N 的内部)。

这一整套结构就叫一个拓扑空间。每一个点 $x \in \boldsymbol{X}$ 指定了满足(a)~(d)的一组邻域,称为在集合 $\boldsymbol{X}$ 上赋予了一个拓扑结构,简称拓扑。为了对拓扑空间有一个更明确的认识,下面再给出一个等价的定义(Armstrong,1983;Schutz,1980)。为此,首先引进开集和闭集的概念。

设 $\boldsymbol{X}$ 是拓扑空间,$\boldsymbol{X}$ 的子集 $\boldsymbol{O}$ 是开集,假如它是它自己每个点的邻域。$\boldsymbol{X}$ 的子集称为闭集,假如它的余集是开集。有了开集的概念,拓扑空间可以等价地定义如下:

集合 $\boldsymbol{X}$ 上的一个拓扑是由 $\boldsymbol{X}$ 的子集所构成的一个非空组,它的成员叫做开集,它们满足下列要求:

(i)任意多个开集的并集是开集;

(ii)有限多个开集的交集是开集;

(iii)X 与空集 $\varnothing$ 是开集。

集合被赋予了上述拓扑之后就称为拓扑空间。

3.2.2 映射

设 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$ 是两个任意集合,它们也可以是任意空间。从 $\boldsymbol{X}$ 到 $\boldsymbol{Y}$ 的映射 f 指的是一个法则,它使 $\boldsymbol{X}$ 中的一个元 x 与 $\boldsymbol{Y}$ 中的唯一的一个元 y 相对应,即

$$f(x) = y, \forall x \in \boldsymbol{X}, \exists(\text{存在}) y \in \boldsymbol{Y} \tag{3.2.3}$$

$f(x)$ 也叫 x 在 $\boldsymbol{Y}$ 中的像。但需注意,不同的 x 未必对应不同的 y。因此,逆映射未必存在。因为映射的概念是,对于 $x \in \boldsymbol{X}$,必存在唯一的 $y \in \boldsymbol{Y}$ 使式(3.2.3)成立。如果对于 $\forall y \in \boldsymbol{Y}$,都可以找到 $x \in \boldsymbol{X}$(不必唯一),使得 $f(x) = y$ 成立,即有

$$f(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{Y} \tag{3.2.4}$$

那么,称映射 f 是从 $\boldsymbol{X}$ 到 $\boldsymbol{Y}$ 上的,或称满映射;如果对于任意两个不同的 $x_1 \in \boldsymbol{X}$ 和 $x_2 \in \boldsymbol{X}$,$f(x_1) \in \boldsymbol{Y}$ 和 $f(x_2) \in \boldsymbol{Y}$ 也不同,那么,称 f 是一对一的。一对一映射并不一定是满映射,满映射也不一定是一对一的。

如果f: $X\to Y$是一对一的满映射，那么，必存在逆映射f^{-1}: $Y\to X$，f^{-1}也是一对一的满映射。

映射概念加上拓扑概念，我们就可以给连续函数下一个简洁的定义。设X和Y是拓扑空间，f是从X到Y的映射。如果Y的任意含有$f(x)$的开集包含X的一个开集的像，则f在X中的x点连续。如果f在X中的每一点都连续，则称f在X上连续。

设f和g均为连续映射，则它们的复合$f\circ g$也是连续映射(Armstrong,1983)。设X和Y是两个拓扑空间，如果h: $X\to Y$是连续映射，并且h^{-1}: $Y\to X$也是连续映射，则称h是同胚映射，相应地，称X与Y同胚。同胚的拓扑空间X和Y可以认为是相同的，因为它们具有完全相同的拓扑结构。于是，由同胚映射h可以从一个已知的拓扑空间构造出另外一个拓扑空间(当然二者的拓扑结构是完全相同的)。比如，一个带有边界的半球面与一个闭圆盘是拓扑同胚的；一个球面挖去一个点之后与E^2(即平面)拓扑同胚。

证明第一个例子只需要作出图3.2.1就够了。很容易证实同胚具有传递性。也即，假定X与Y同胚，Y与Z同胚，则X与Z同胚。今用X和Y分别代表闭半球面和闭圆盘。由于任何圆盘之间都是同胚的，因此，可选定一圆盘Z，它的半径(赋予普通距离概念之后)与闭半球面的半径相同。将X和Z按图3.2.1放置，作平行线簇l，每一个直线l只有两个交点，一个在X上，一个在Z上。按这种方式，l将X中的点与Z中的点建立了一一对应的关系。而且不难看出l: $X\to Z$是连续的，l^{-1}: $Z\to X$也连续。这就是说，X与Z同胚。

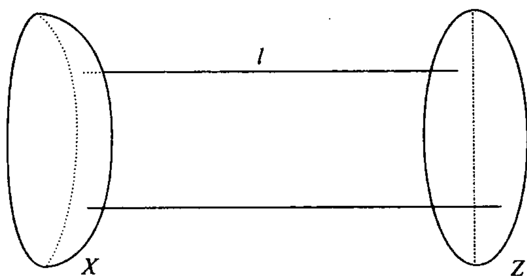


图3.2.1　闭半球面X与盘Z同胚

证明第二个例子相对来说复杂一些。$\mathbf{S}^2$ 挖掉一个点 P 之后与 $\mathbf{E}^2$ 同胚。用图 3.2.2 很容易构造出同胚映射 h: $x \to y$,其中, $x \in \mathbf{S}^2 - \{P\}$, $y \in \mathbf{E}^2$。映射 h 是由过 P 点的射线分别在 $\mathbf{S}^2$ 和 $\mathbf{E}^2$ 上的两个点(元)之间的函数关系。每一个 x 对应唯一的一个 y,而且, x 不同, y 也不同,反之亦然。因此,不难证实, h 是连续的,并且 h^{-1}: $y \to x$ 也是连续的。这表明 h 是同胚映射。因此, $\mathbf{E}^2$ 与挖去了一点的球面 $\mathbf{S}^2$ 同胚。如果保留 P 点(即不挖去 P 点),那么, P 将与 $\mathbf{E}^2$ 中所有无穷远处的点相对应。在这种情况下,映射 h 在 P 点是不连续的,因此, $\mathbf{S}^2$ 与 $\mathbf{E}^2$ 不同胚。

同胚的概念极为重要,后面还要用到。

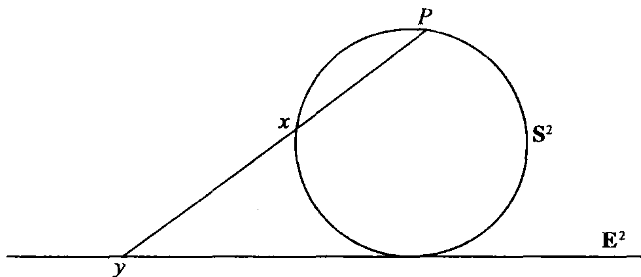


图 3.2.2　球面 $\mathbf{S}^2$ 挖掉一点 P 之后与无限平面 $\mathbf{E}^2$ 同胚

3.2.3　流形与张量

经典物理学认为空间与时间是独立的,空间是三维连续区。狭义相对论则认为空间与时间不可分,空时是四维连续区(四维世界)。但不论是经典物理学还是狭义相对论,均认为空时是“平坦”的,因而具有通常的平移与矢量叠加等概念。狭义相对论认为,整个空时中发生的任何事件都可以与闵可夫斯基空间中的点建立一一对应关系。然而,在广义相对论中,并不作这种先验的假定。因为一个浅显的例子是,地球表面(可看做二维空间)从局部来看很像平面,而整体结构却与平面完全不同。从本质上来说,研究地球表面,只需要研究其内禀性质,无须将它嵌入三维欧氏空间 $\mathbf{E}^3$。这是最先由高

斯(Gauss,1824,参见 Weinberg,1972)发现的性质。广义相对论遵循高斯的方法,并不事先假定空时要嵌入更高维的空间,而是研究空时本身的性质。这个空时本身,从局部来看,类似于欧氏空间(现在知道类似于闵可夫斯基四维空间),但整体说来,则可以完全不同。为此,我们把空时抽象地看做流形,当赋予不同的结构时,就具有不同的空时性质。球面可以看做流形,平面也可以看做流形。二者整体结构不同,但局部结构完全相同,因为球面上的任何开邻域与平面上的任何开邻域都是同胚的。

设定由 n 维数组$(x^1,x^2,\cdots,x^n)$构成实向量代数空间 $\mathbf{R}^n$,当赋予拓扑结构以后,$\mathbf{R}^n$ 成为拓扑空间(Schutz,1980)。关于实向量代数空间的定义,可参见相关文献(Schutz,1980;侯伯元,侯伯宇,2004)。如果在 $\mathbf{R}^n$ 空间中按如下方式定义距离

$$|x-y| = \left(\sum_{\mu=1}^{n}(x^\mu - y^\mu)^2\right)^{1/2} \tag{3.2.5}$$

则 $\mathbf{R}^n$ 成为 n 维欧氏空间 $\mathbf{E}^n$。

所谓 n 维流形 $\boldsymbol{M}$,直观地说,就是 $\boldsymbol{M}$ 的局部看起来就像 $\mathbf{E}^n$ 中的一个开邻域。从整体上看,流形是由一片片的 $\mathbf{E}^n$ 中的开邻域光滑地联结(或粘合)起来的空间。比如,将 $\mathbf{S}^2$(二维球面)看做流形,那么,$\mathbf{S}^2$ 看起来好像是由 $\mathbf{E}^2$ 中的很多小片(开邻域)光滑地粘合起来的。精确地说,一个 n 维的、具有无限次可微性质的(记为 C^∞)、实的流形 $\boldsymbol{M}$,是一个由开集簇$\{O_P\}$构成的集合,满足(Schutz,1980;侯伯元,侯伯宇,2004)

(i) $\forall P \in \boldsymbol{M}$, $\exists O_P$,即$\{O_P\}$覆盖 $\boldsymbol{M}$;

(ii)对于 $\forall X \in O_P$,存在一对一到 U_P上的映射 $\psi_P: O_P \to U_P$,其中 U_P是 $\mathbf{E}^n$ 中的开集;

(iii) $\forall O_P \subset \boldsymbol{M}$ 和 $O_Q \subset \boldsymbol{M}$,若 $O_P \cap O_Q \neq \varnothing$($\varnothing$是空集),则复合映射 $\psi_Q \circ \psi_P^{-1}$(先作用 ψ_P^{-1} 后作用 ψ_Q)将 $\psi_P[O_P \cap O_Q] \subset U_P \subset \mathbf{E}^n$ 中的点映射为 $\psi_Q[O_P \cap O_Q] \subset U_Q \subset \mathbf{E}^n$ 中的点,并且要求上述映射是 C^∞ 的(即无穷连续可微的)。

上述定义可以用图 3.2.3 加以形象化显示。

假定 $\boldsymbol{M}$ 和 $\boldsymbol{N}$ 是按上述方式定义的流形,如果影射 h: $\mathbf{M} \to \mathbf{N}$ 是

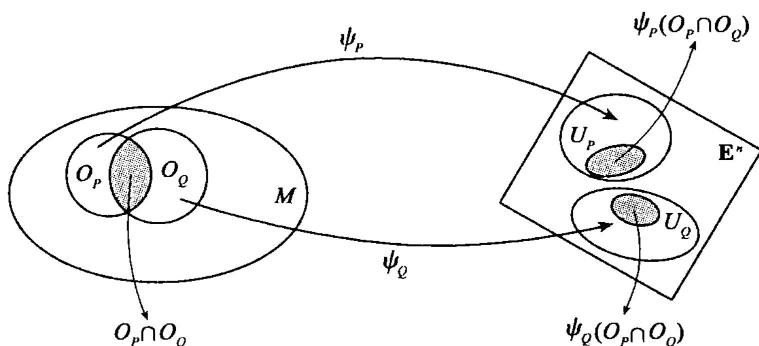


图 3.2.3　从流形 M 中的子空间到欧几里得空间 $\mathbf{E}^n$ 中的映射示意图

C^∞ 的，而且 $h^{-1}: \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{M}$ 也是 C^∞ 的，则称 $\boldsymbol{M}$ 与 $\boldsymbol{N}$ 是 C^∞ 微分同胚的，h 称为 C^∞ 微分同胚映射。两个 C^∞ 微分同胚的流形 $\boldsymbol{M}$ 和 $\boldsymbol{N}$ 具有完全相同的结构，二者可以认为相同。举例来说，一个二维正方形与一个圆盘尽管是拓扑同胚的，但二者不是 C^∞ 微分同胚的，甚至不是 C^1 微分同胚的（只要将上面的 C^∞ 换成 C^k 就得到 C^k 微分同胚的概念）。因为在边界处，正方形没有连续导数，而圆盘的边界点有 C^∞ 导数。因此，只能说正方形流形 $\boldsymbol{M}$ 与圆盘流形 $\boldsymbol{N}$ 是 C^0 微分同胚的，简称同胚。两个流形如果是 C^k 微分同胚的，$k \neq \infty$，那么，这两个流形就不能认为完全相同。只有 C^∞ 微分同胚，才可以认为二者完全相同。这与拓扑同胚的概念有差异。拓扑空间没有赋予微分概念，空间的结构比较“原始”，只要两个拓扑空间同胚（映射与逆映射均连续），二者就可视为相同。当流形赋予了微分（C^k 微分或 C^∞ 微分）概念之后，从结构上来看变复杂了，这时，仅仅从同胚还不能推断两个流形是否相同。因此，还必须指明同胚是多少阶次的微分同胚。比如，两个流形如果是 C^k 微分同胚的，则可认为这两个流形的结构直到 C^k 微分都是相同的。关于 n 维流形以及微分流形的概念，也可参见有关文献（陈省身，陈维桓，1983）。

有了流形的概念，我们再来研究流形中的矢量。在普通欧氏空间中，矢量的概念是人们熟知的。对于位于空间中任意两点处的矢

量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$,我们可以按通常的平移方式比较它们是否平行。但在流形中,这一观点必须放弃。比如,按通常的观念,在二维球面流形中,不借助于三维空间就无法知道处于球面上的两处的矢量之间的关系。实际上,沿球面上不同的路径进行平移(在 S^2 流形空间中),得到的最终结论不一样。这一点可以通过考察图 3.2.4 得知。

设 A 和 B 在赤道上, C 在极点(北极)。有一矢量 $\boldsymbol{V}$ 位于赤道上的 A 处,其方向沿赤道的切线方向。先从 A 沿大圆路经 AC 将 $\boldsymbol{V}$ 平移到 C(移动时 $\boldsymbol{V}$ 始终与球面相切),得到矢量 $\boldsymbol{V}_1$。另一方面,将矢量 $\boldsymbol{V}$ 从 A 先沿赤道保持与球面相切移动到 B(在二维球面流形中只能保持相切移动),再沿 BC 大圆平行移动到达 C,那么,得到的将是 $\boldsymbol{V}_2$。$\boldsymbol{V}_2$ 与 $\boldsymbol{V}_1$ 并不重合。如果我们选 B 为 A 的对径点,那么,经由两条不同的路径(AC 和 ABC)平移矢量 $\boldsymbol{V}$ 之后所得到的结果正好相反,即 $\boldsymbol{V}_1$ 与 $\boldsymbol{V}_2$ 正好反向。

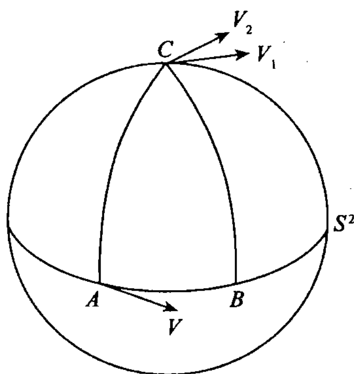


图 3.2.4　S^2 流形中矢量的平行移动

这就提出了一个问题:给定了流形,如何定义平行移动呢? 首先我们要指出,如果给流形赋予了某种特殊的结构,比如赋予度规 $g_{\mu\nu}$,那么,平行移动就唯一地确定下来了。但这并非意味着平行移动与路径无关;只有在平直空间,平行移动才与路径无关。为此,我们需要研究流形的内禀结构,这种结构不依赖于外部空间的性质。在 $\mathbf{E}^n$ 空间中,一个向量 $\boldsymbol{V}=(V^1,\cdots,V^n)$ 对应于一个方向导数

$V^\mu \partial/\partial x^\mu$（注意求和约定）；反之亦然。类似地，假定 $\boldsymbol{F}$ 是从流形 $\boldsymbol{M}$ 到实数域 $\boldsymbol{R}$ 的 C^∞ 函数的集合，我们定义流形 $\boldsymbol{M}$ 中任意一点 P 处的切向量 $\boldsymbol{V}$ 是一个映射 $\boldsymbol{V}: \boldsymbol{F}\to\boldsymbol{R}$，满足如下两个条件：

(i)线性相加法则：$\boldsymbol{V}(af+bg)=a\boldsymbol{V}(f)+b\boldsymbol{V}(g)$，$\forall f,g\in \boldsymbol{F}$，$\forall a,b\in \mathbf{R}$；

(ii)莱布尼兹法则：$\boldsymbol{V}(fg)=f(P)\boldsymbol{V}(g)+g(P)\boldsymbol{V}(f)$，$\forall P\in \boldsymbol{M}$

由(i)和(ii)不难推证，如果 $h\in F$ 是常数映射，即 $h(P)=C$（对 $\forall P\in \boldsymbol{M}$），则 $\boldsymbol{V}(h)=0$。

由上述定义给出的切矢量概念是足够精确的，$P(\in \boldsymbol{M})$点的切矢量集合 V_P（即由 P 点的切矢量的全体构成的集合）是线性矢量空间，此因 $(\boldsymbol{V}+\boldsymbol{U})(f)=\boldsymbol{V}(f)+\boldsymbol{U}(f)$，而且 $\boldsymbol{V}(af)=a\boldsymbol{V}(f)$，其中 $\boldsymbol{V}$ 和 $\boldsymbol{U}$ 是 $\boldsymbol{V}_P$ 中的任意矢量。$\boldsymbol{V}_P$ 的维数是流形 $\boldsymbol{M}$ 的维数，这由下述定理保证（Wald，1984）。

定理：设 M 是一 n 维流形，对 $P\in M$，P 点的切矢量空间 V_P 的维数为 n。

这里略去证明过程。

需要注意，矢量 $\boldsymbol{V}$ 是从函数空间 $\boldsymbol{F}$ 到实数空间 $\mathbf{R}$ 的映射，而函数空间 $\mathbf{F}$ 是从流形 $\boldsymbol{M}$ 到 $\mathbf{R}$ 上的 C^∞ 函数的集合。在 $\boldsymbol{M}$ 中任取一点 $P\in \boldsymbol{M}$，可以构造一个 C^∞ 微分同胚映射 ψ：$\boldsymbol{M}\to\mathbf{E}^n$（$\boldsymbol{M}$ 是 n 维 C^∞ 流形），使得

$$\psi(P)=(x^1,x^2,\cdots,x^n) \tag{3.2.6}$$

因此，通常也称 ψ 是一个坐标系（也称卡或图，参见图 3.2.3，以及梁灿彬，周彬，2006），因为它把 $\boldsymbol{M}$ 中的一点与 $\mathbf{E}^n$ 中的坐标 $(x^1,\cdots,x^n)$ 联系了起来。反过来，$\mathbf{E}^n$ 中的坐标 $(x^1,\cdots,x^n)$ 可以通过逆映射 ψ^{-1}（这里，ψ^{-1}也必定是 C^∞ 微分同胚映射）映到 $\boldsymbol{M}$ 中的 P 点，即有

$$P=\psi^{-1}(x^1,\cdots,x^n) \tag{3.2.7}$$

设 $f\in\mathbf{F}$，由于 $\mathbf{F}$ 是从 $\boldsymbol{M}$ 到 $\mathbf{R}$ 上的 C^∞ 函数集合空间，因此，f 将 P 点映为 $\mathbf{R}$ 中的一个实数

$$f(P)=a\in\mathbf{R} \tag{3.2.8}$$

即

$$a = f(P) = f \circ \psi^{-1}(x^1, \cdots, x^n) \tag{3.2.9}$$

这里，a 是坐标$(x^1, \cdots, x^n)$的函数。于是，我们可以构造坐标基

$$X_\mu(f) = \frac{\partial}{\partial x^\mu}(f \circ \psi^{-1}) \bigg|_{\psi(P)} (\psi(P) = (x^1, \cdots, x^n)) \tag{3.2.10}$$

以 X_μ 为坐标基，映射 V 对 f 的作用可表示成(Wald，1984)

$$V(f) = V^\mu X_\mu(f) \tag{3.2.11}$$

或写成

$$V = V^\mu X_\mu \tag{3.2.12}$$

其中 V^μ 是矢量 V 在坐标基 X_μ 下的分量。如果换一个坐标基 X'_μ，则 V 可表示成

$$V = V'^\mu X'_\mu \tag{3.2.13}$$

V'^μ 是矢量 V 在新坐标基 X'_μ 下的分量。新旧坐标基之间的变换关系由下式给出

$$X_\mu = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \bigg|_{\psi(P)} X'_\nu \tag{3.2.14}$$

由方程(3.2.12)～(3.2.14)得

$$V'^\nu = V^\mu \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \tag{3.2.15}$$

方程(3.2.15)称为矢量变换律。

实际上，我们对方程(3.2.12)～(3.2.15)并不陌生。以三维平直空间为例，若选定直角坐标基 e_x、e_y、e_z(为简便记，在本书中，坐标基的矢量箭头或粗体表示总是省略，通常不会引起误解)，则空间矢量 r 可表示成

$$r = xe_x + ye_y + ze_z \tag{3.2.16}$$

或写成

$$r = x^i e_i \tag{3.2.17}$$

其中 x^1、x^2、x^3 分别是 x、y、z，而 e_1、e_2、e_3 分别表示坐标基 e_x、e_y、e_z，矢量 r 在坐标基 e_i 下的分量是 x^i。若选定新的坐标基，比如球面坐标系坐标基 e_r、e_θ、e_λ，则 r 可表示成

$$r = p_r e_r + p_\theta e_\theta + p_\lambda e_\lambda \tag{3.2.18}$$

或写成

$$\boldsymbol{r} = x'^i \boldsymbol{e}'_i \tag{3.2.19}$$

其中 x'^i 是 $\boldsymbol{r}$ 在新坐标基 $\boldsymbol{e}'_i$（$\boldsymbol{e}'_i$ 分别表示 $\boldsymbol{e}_r$、$\boldsymbol{e}_\theta$、$\boldsymbol{e}_\lambda$）下的分量。由于新旧坐标之间由下列变换联系

$$\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\lambda \\ y &= r\sin\theta\sin\lambda \\ z &= r\cos\theta \end{aligned} \tag{3.2.20}$$

鉴于方程(3.2.14)，有

$$\boldsymbol{e}'_i = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i}\boldsymbol{e}_j \tag{3.2.21}$$

将(3.2.20)代入上式，得

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}'_1 &\equiv \boldsymbol{e}_r = \frac{\partial x^j}{\partial r}\boldsymbol{e}_j = \sin\theta\cos\lambda\boldsymbol{e}_1 + \sin\theta\sin\lambda\boldsymbol{e}_2 + \cos\lambda\boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}'_2 &\equiv \boldsymbol{e}_\theta = \frac{\partial x^j}{\partial \theta}\boldsymbol{e}_j = r\cos\theta\cos\lambda\boldsymbol{e}_1 + r\cos\theta\sin\lambda\boldsymbol{e}_2 - r\sin\theta\boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}'_3 &\equiv \boldsymbol{e}_\lambda = \frac{\partial x^j}{\partial \lambda}\boldsymbol{e}_j = -r\sin\theta\sin\lambda\boldsymbol{e}_1 + r\sin\theta\cos\lambda\boldsymbol{e}_2 \end{aligned} \tag{3.2.22}$$

这就是球面坐标基与直角坐标基之间的关系。在由式(3.2.22)所表示的新坐标基之下，$\boldsymbol{r}$ 的分量由方程(3.2.15)给出。

在第 2 章中我们曾经指出，凡是满足变换律(3.2.15)的量都称为矢量，不过当时要求变换矩阵 $\partial x'^\nu/\partial x^\mu$ 是洛伦兹变换。现在，矢量概念推广了，$\partial x'^\nu/\partial x^\mu$ 可以是任意变换矩阵，只要它是非奇异的，即雅可比行列式 $|\partial x'^\nu/\partial x^\mu|$ 不为零。

在流形 $\boldsymbol{M}$ 上可以定义光滑曲线 C。$\boldsymbol{M}$ 中的一条光滑曲线 C 是 $\mathbf{R}$（或 $\mathbf{R}$ 中的一个区间）到 $\boldsymbol{M}$ 中的映射，即 $C\colon \mathbf{R}\to\boldsymbol{M}$。对于曲线 C 上的任意一点 $P\in\boldsymbol{M}$，我们可以构造一个切矢量 $\boldsymbol{T}\in\boldsymbol{V}_P$（$\boldsymbol{V}_P$ 是 P 点的切矢量空间）。构造方法如下：对于 $f\in\mathbf{F}$，令 $\boldsymbol{T}(f)$ 等于映射函数 $f\circ C\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 相对于参数 t 的导数（在 P 点），即

$$\boldsymbol{T}(f) = \mathrm{d}(f\circ C)/\mathrm{d}t \tag{3.2.23}$$

我们可选定一个坐标系 ψ，它是一个从 $\boldsymbol{M}$ 到 $\mathbf{E}^n$ 的映射，它将 $\boldsymbol{M}$ 中的曲线 C 映为 $\mathbf{E}^n$ 中的曲线 $x^\mu(t)$：

$$\psi(C) = (x^1(t), \cdots, x^n(t)) \tag{3.2.24}$$

由此得

$$C = \psi^{-1}(x^1(t), \cdots, x^n(t)) \tag{3.2.25}$$

于是，由方程(3.2.23)和方程(3.2.25)得

$$\boldsymbol{T}(f) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f \circ C) = \frac{\partial}{\partial x^\mu}(f \circ \psi^{-1}) \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t} \tag{3.2.26}$$

将方程(3.2.10)代入上式，得

$$\boldsymbol{T}(f) = \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{X}_\mu(f) \tag{3.2.27}$$

由于 $\boldsymbol{T}$ 是切矢量，根据方程(3.2.11)，采用坐标基 $\boldsymbol{X}_\mu(f)$，则 $T(f)$ 可表示成

$$\boldsymbol{T}(f) = T^\mu \boldsymbol{X}_\mu(f) \tag{3.2.28}$$

其中 T^μ 是 $\boldsymbol{T}$ 在坐标基 $\boldsymbol{X}_\mu$ 下的分量。比较方程(3.2.27)与方程(3.2.28)得

$$T^\mu = \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t} \tag{3.2.29}$$

上述方程给出了曲线 C 上一点 P 处的切矢量 $\boldsymbol{T}$ 的矢量表达式。

在上述讨论中，我们固定了一点 $P \in \boldsymbol{M}$ 并考虑了 P 点的切矢量空间 $\boldsymbol{V}_P$。对于另外一点 $Q \in \boldsymbol{M}$，同样有一个切矢量空间 $\boldsymbol{V}_Q$。如何知道这两个切矢量空间的关系呢？确切地说，假定 $\boldsymbol{V} \in \boldsymbol{V}_P$，$\boldsymbol{U} \in \boldsymbol{V}_Q$，如何比较 $\boldsymbol{V}$ 与 $\boldsymbol{U}$ 是否相同呢？仅仅给定流形结构还不能回答这个问题，或者更确切地说，在没有赋予流形更多的结构之前，提出这个问题是没有意义的。只有给流形赋予了更多的结构，我们才可以提出这个问题进行讨论。比如，一个浅显的例子是，假如流形 $\boldsymbol{M}$ 是三维的，赋予欧几里得度规使其成为三维欧氏空间，那么，任意两点的(切)矢量的比较可以按通常的平移方式进行。以后我们还将讨论给流形赋予引力场度规 $g_{\mu\nu}$ 时的情形。

在第2章我们曾经讨论过张量，但没有给出严格的定义。有了映射、矢量等概念以后我们就可以着手定义张量了。假定 $\boldsymbol{V}$ 是 n 维实数矢量空间(当然，我们最感兴趣的是切矢量空间 $\boldsymbol{V}_P$)。考虑一集合 $\boldsymbol{V}^*$，它的每一个元是从 $\boldsymbol{V}$ 到 $\mathbf{R}$ 的映射。给集合 $\boldsymbol{V}^*$ 赋予普通

的加法和数乘之后，V^* 就成为矢量空间了，其维数与 V 的维数相同(Schutz，1980；申文斌，2005)。我们称 V^* 为 V 的对偶矢量空间，而 V^* 中的元称为对偶矢量。V^* 中的对偶矢量作用于 V 中的矢量就得到一个实数。假定 $e_1,\cdots,e_n$ 是 V 中的一组基底(注意基底 e_i 是 n 维矢量)，我们可定义 V^* 的基底 $e_1^*,\cdots,e_n^*$ 满足如下关系

$$e^{*\mu}(e_\nu) = \delta^\mu{}_\nu \tag{3.2.30}$$

$e^{*\mu}$称为基底 e_μ 的对偶基底。V 中的任一矢量 U 可表示成 e_μ 的线性组合。同理，V^* 中的任一矢量 W^* 可表示成 $e^{*\mu}$的线性组合。

$\mathbf{V}$ 是线性矢量空间。$\forall U\in\mathbf{V}$，$\exists$(存在)对偶矢量 $W^*\in V^*$，使得 $W^*(U)=a\in\boldsymbol{R}$。又对 $\forall W^*\in V^*$，存在对偶矢量 $W^{**}\in V^{**}$，使得 $W^{**}(W^*)=b\in\boldsymbol{R}$。令 $b=a$，即 $W^{**}(W^*)=W^*(U)$，于是，每一个元 $U\in\mathbf{V}$ 对应一个元 $W^{**}\in V^{**}$；反之亦然。它们均是 n 维线性矢量空间，基底也有相同的形式，因此，V^{**}与 $\mathbf{V}$ 是同构的。这就是说，$\mathbf{V}$ 与 V^{**}具有完全相同的代数结构，二者可认为是同一的。V^{**}是 V^* 的对偶矢量空间，而 V^* 是 $\mathbf{V}$ 的对偶矢量空间，因而称 V^{**}为 $\mathbf{V}$ 的双对偶矢量空间。任何一个矢量空间的双对偶矢量空间与自身是同构的。同时，又由于它们具有相同形式的基底，因而二者是同一的。这里需要说明的是，V^* 与 $\mathbf{V}$ 之间也可建立同构关系，但由于它们的基底具有不相同的形式，因此二者不是同一的。由于 $\mathbf{V}$ 与 V^{**}是同一的，因此，$\mathbf{V}$ 可以看做由 V^* 到 $\mathbf{R}$ 的映射的全体构成的矢量空间，正如 V^* 是由 $\mathbf{V}$ 到 $\mathbf{R}$ 的映射全体构成的矢量空间。基于这种观点，我们就可以给出张量的严格定义了。

设 $\mathbf{V}$ 是 n 维矢量空间，V^* 是 $\mathbf{V}$ 的对偶矢量空间。一个(k,l)型混合张量 $\boldsymbol{T}$ 是如下的一个多元线性映射(Schutz，1980)

$$\boldsymbol{T}:(\underbrace{\mathbf{V}^*,\cdots,\mathbf{V}^*}_{k};\underbrace{\mathbf{V},\cdots,\mathbf{V}}_{l})\to\mathbf{R} \tag{3.2.31}$$

或记为

$$\boldsymbol{T}(V^{1*},\cdots,V^{k*};V_1,\cdots,V_l) = a\in\mathbf{R} \tag{3.2.32}$$

也就是说，张量 $\boldsymbol{T}$ 是这样一个映射，它作用于 k 个对偶矢量和 l 个矢量之后产生一个实数。

根据上述张量定义，(0,1)张量是从 $\mathbf{V}$ 到 $\mathbf{R}$ 的映射，因而是对偶

矢量。(1,0)张量是从 $\mathbf{V}^*$ 到 $\mathbf{R}$ 的映射,因而是矢量。(0,0)张量就是标量。由所有(k,l)型张量的全体构成的集合 $\mathbf{T}(k,l)$,赋予普通数乘,则构成一张量空间。由于 $\mathbf{V}$ 和 $\mathbf{V}^*$ 均是 n 维的,因而,$\mathbf{T}(k,l)$是 n^{k+l}维的。就映射 $\mathbf{T}$ 而言,如果只给定一个指标,那么,就有 n^{k+l}个分量;如果给定 $k+l$ 个指标,那么,每个指标对应 n 种选择,因而 $k+l$ 个指标同样对应 n^{k+l}个分量。如果选定张量基底 $t_{\mu_1\cdots\mu_k}{}^{\nu_1\cdots\nu_l}$,则张量 $\boldsymbol{T}$ 可表示成

$$\boldsymbol{T} = T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l}t_{\mu_1\cdots\mu_k}{}^{\nu_1\cdots\nu_l} \tag{3.2.33}$$

$T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l}$称为张量 $\boldsymbol{T}$ 的分量,上标称为逆变指标,下标称为协变指标。逆变指标或协变指标的概念基于张量的变换性质(见后)。张量基 $t_{\mu_1\cdots\mu_k}{}^{\nu_1\cdots\nu_l}$可由 $\mathbf{V}$ 和 $\mathbf{V}^*$ 的基底利用直积形式得到

$$t_{\mu_1\cdots\mu_k}{}^{\nu_1\cdots\nu_l} = \boldsymbol{e}_{\mu_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{e}_{\mu_k}\otimes\boldsymbol{e}^{*\nu_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{e}^{*\nu_l} \tag{3.2.34}$$

直积的意思是说,如果 A 对应 n 维数组$(A_1,\cdots,A_n)$,B 对应 m 维数组$(B_1,\cdots,B_m)$,那么,$A\otimes B$ 对应一个 nm 维数组$(A_iB_j \mid i=1,\cdots n, j=1,\cdots,m)$。

对于 $P(\in \boldsymbol{M})$点的切矢量空间 $\mathbf{V}_P$ 来说,坐标基由 $\partial/\partial x^\mu$ 给出。相应地,对偶矢量空间 $\mathbf{V}_P^*$(也称余切矢量空间)的坐标基由 $\mathrm{d}x^\mu$ 给出。对于任意一矢量 $V\in \boldsymbol{V}_P$,在坐标基 $\partial/\partial x^\mu$ 下的分量为 V^μ,在新坐标基 $\partial/\partial x'^\mu$ 下的分量为 V'^μ,二者之间由变换律(3.2.15)给出

$$V'^\nu = V^\mu\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \tag{3.2.35}$$

对于 $\boldsymbol{V}_P^*$ 中的矢量 $\boldsymbol{W}$ 来说,其分量在新旧坐标系之间的变换律由下式给出

$$W'_\nu = W_\mu\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} \tag{3.2.36}$$

由于方程(3.2.15)和方程(3.2.36)从形式上可分别写成

$$V'^\nu/\partial x'^\nu = V^\mu/\partial x^\mu$$

$$W'_\nu\partial x'^\nu = W_\mu\partial x^\mu \tag{3.2.37}$$

因此,通常将 V^ν 称为逆变矢量,相应的指标便称为逆变指标,而将

W_ν 称为协变矢量,相应的指标便称为协变指标。一般地,在不致引起混淆的情况下,将 V^ν 或 W_ν 统称为矢量。

根据矢量的变换律,不难看出张量变换律如下

$$T'^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l} = T^{\lambda_1\cdots\lambda_k}{}_{\sigma_1\cdots\sigma_l}\frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\lambda_1}}\cdots\frac{\partial x'^{\mu_k}}{\partial x^{\lambda_k}}\frac{\partial x^{\sigma_1}}{\partial x'^{\nu_1}}\cdots\frac{\partial x^{\sigma_l}}{\partial x'^{\nu_l}} \tag{3.2.38}$$

因此,方程(3.2.38)也常常被用来作为张量的定义。在第 2 章,我们曾经用到了这一定义,不过那时,坐标系之间的变换是洛伦兹变换,即 x^μ 与 x'^μ 之间由洛伦兹变换给出。显然,这里给出的定义是广义的,x'^μ 与 x^μ 之间可以是任意的函数关系,只要保证雅可比行列式 $|\partial x'^\mu/\partial x^\nu|$ 不为零即可。

3.2.4 张量代数

前面给出了张量的定义,但概念比较抽象。下面用一些简单的例子阐述张量的基本运算规则及性质。

(1)线性组合　上下指标相同的张量的线性组合也是这些指标的张量。例如,令 $A^\mu{}_\nu$ 和 $B^\mu{}_\nu$ 是混合张量,又令

$$T^\mu{}_\nu \equiv aA^\mu{}_\nu + bB^\mu{}_\nu \quad \forall a,b \in \mathbf{R} \tag{3.2.39}$$

则 $T^\mu{}_\nu$ 也是一个张量,此因

$$\begin{aligned} T'^\mu{}_\nu &\equiv aA'^\mu{}_\nu + bB'^\mu{}_\nu = a\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}A^\rho{}_\sigma + b\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}B^\rho{}_\sigma \\ &= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}(aA^\rho{}_\sigma + bB^\rho{}_\sigma) = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}T^\rho{}_\sigma \end{aligned} \tag{3.2.40}$$

即 $T^\rho{}_\sigma$ 满足张量变换律(3.2.38)。

(2)直积　两个张量的各分量的乘积,产生一新的张量,其上下指标由原来的两个张量的上下指标组成。例如,设 $A^\mu{}_\nu$ 和 B^ρ 是张量,令

$$T^\mu{}_\nu{}^\rho = A^\mu{}_\nu B^\rho \tag{3.2.41}$$

则 $T^\mu{}_\nu{}^\rho$ 也是一张量,因为

$$T'^\mu{}_\nu{}^\rho \equiv A'^\mu{}_\nu B'^\rho = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}A^\alpha{}_\beta\frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\sigma}B^\sigma$$

$$= \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\sigma}} A^{\alpha}{}_{\beta} B^{\sigma}$$

$$= \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\sigma}} T^{\alpha}{}_{\beta}{}^{\sigma} \tag{3.2.42}$$

(3)缩并 令张量的一个上指标和一个下指标相同,并对该指标(从 1 到 n)求和,就得到没有这两个(相同)指标的新张量。例如,设 $T^{\mu}_{\nu}{}^{\rho\sigma}$是一张量,令

$$T^{\mu\rho} \equiv T^{\mu}{}_{\nu}{}^{\rho\nu} \tag{3.2.43}$$

则 $T^{\mu\rho}$是一张量。这只要检验它的变换律即可

$$T'^{\mu\rho} \equiv T'^{\mu}{}_{\nu}{}^{\rho\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\lambda}} T^{\alpha}{}_{\beta}{}^{\sigma\lambda}$$

$$= \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\sigma}} \delta_{\lambda}{}^{\beta} T^{\sigma}{}_{\beta}{}^{\sigma\lambda}$$

$$= \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\sigma}} T^{\alpha}{}_{\beta}{}^{\sigma\beta} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\sigma}} T^{\alpha\sigma} \tag{3.2.44}$$

上述三种运算可以组合起来使用,其中,通过组合法可以使一个张量的指标提升或下降。比如,设 $T^{\mu\rho}{}_{\sigma}$是任意张量, $g_{\mu\nu}$是度规张量, $g^{\mu\nu}$是 $g_{\mu\nu}$的逆,也是一张量。定义

$$S_{\nu}{}^{\rho}{}_{\sigma} \equiv g_{\mu\nu} T^{\mu\rho}{}_{\sigma}$$

$$R^{\mu\rho\nu} \equiv g^{\nu\sigma} T^{\mu\rho}{}_{\sigma} \tag{3.2.45}$$

则 $S_{\nu}{}^{\rho}{}_{\sigma}$和 $R^{\mu\rho\nu}$均为张量,因为两个张量的乘积是张量,指标缩并之后也是张量。上边的第一个定义式,完成了对张量指标 μ 的下降,第二个定义式,则完成了对张量指标 σ 的提升。通过对指标的提升或下降,可以把一个张量用不同的方式写出来,只要 $g_{\mu\nu}$是已知的。由于 $g^{\mu\nu}$是 $g_{\mu\nu}$的逆,因此,对 $g_{\mu\nu}$提升一个指标或对 $g^{\mu\nu}$下降一个指标则得到 Kronecker 张量,即

$$g^{\mu\lambda} g_{\lambda\nu} = \delta^{\mu}{}_{\nu} \tag{3.2.46}$$

如果将 $g_{\mu\nu}$的两个指标都提升,则得到逆张量

$$g^{\lambda\mu} g^{\sigma\nu} g_{\mu\nu} = g^{\lambda\mu} \delta^{\sigma}{}_{\mu} = g^{\lambda\sigma} \tag{3.2.47}$$

对 $g^{\mu\nu}$下降两个指标则得到度规张量 $g_{\mu\nu}$。

如果交换张量分量 $T^{\mu_1 \cdots \mu_i \cdots \mu_k}{}_{\nu_1 \cdots \mu_j \cdots \nu_l}$ 的两个指标 μ_i 和 ν_j,得到

的新的张量分量与原来的张量分量相同，那么，称张量 T 关于指标 μ_i 和 ν_j 是对称的。如果交换 μ_j 和 ν_j 后，张量分量正好反号，那么，称张量关于指标 μ_j 和 ν_j 是反对称的。如果 $\boldsymbol{T}$ 关于任意两个指标对称，则称 $\boldsymbol{T}$ 为完全对称张量。 如果 $\boldsymbol{T}$ 关于任意两个指标反对称，则称 $\boldsymbol{T}$ 为完全反对称张量。 $\delta^{\mu}{}_{\nu}$，$\eta_{\mu\nu}$，$g_{\mu\nu}$等量均为对称张量，而 Levi-Civita 张量 $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$（见 2.7 节的定义式（2.7.29））则为完全反对称张量。

任何一个张量，均可分解成完全对称张量与完全反对称张量的和。比如，设 $T_{\mu\nu}$是一般张量，我们可构造对称张量

$$T_{(\mu\nu)} = \frac{1}{2}(T_{\mu\nu} + T_{\nu\mu}) \tag{3.2.48}$$

和反对称张量

$$T_{[\mu\nu]} = \frac{1}{2}(T_{\mu\nu} - T_{\nu\mu}) \tag{3.2.49}$$

而 $T_{\mu\nu}$可表示成

$$T_{\mu\nu} = T_{(\mu\nu)} + T_{[\mu\nu]} \tag{3.2.50}$$

由于任何一个(k,l)型张量，均可通过指标下降变成$(0,k+l)$型张量，因此，下面我们只给出$(0,l)$型张量 $T_{\nu_1\cdots\nu_l}$的完全对称和完全反对称张量的表达形式。$T_{\nu_1\cdots\nu_l}$可表示成

$$T_{\nu_1\cdots\nu_l} = T_{(\nu_1\cdots\nu_l)} + T_{[\nu_1\cdots\nu_l]} \tag{3.2.51}$$

其中

$$T_{(\nu_1\cdots\nu_l)} = \frac{1}{l!}\sum_{\pi} T_{\nu_{\pi(1)}\cdots\nu_{\pi(l)}} \tag{3.2.52}$$

是完全对称张量，而

$$T_{[\nu_1\cdots\nu_l]} = \frac{1}{l!}\sum_{\pi} \delta_{\pi} T_{\nu_{\pi(1)}\cdots\nu_{\pi(l)}} \tag{3.2.53}$$

是完全反对称张量，π 是对 $1,2,\cdots,l$ 所有可能的置换，而

$$\delta_{\pi} = \begin{cases} +1, \text{当 } \pi \text{ 是偶置换时} \\ -1, \text{当 } \pi \text{ 是奇置换时} \end{cases} \tag{3.2.54}$$

举例来说

$$
\begin{aligned}
T_{(\mu_1\mu_2)} &= \frac{1}{2!}\sum_\pi T_{\mu_{\pi(1)}\mu_{\pi(2)}} = \frac{1}{2}(T_{\mu_1\mu_2} + T_{\mu_2\mu_1}) \\
T_{[\mu_1\mu_2]} &= \frac{1}{2!}\sum_\pi \delta_\pi T_{\mu_{\pi(1)}\mu_{\pi(2)}} = \frac{1}{2}(T_{\mu_1\mu_2} - T_{\mu_2\mu_1}) \\
T_{(\mu_1\mu_2\mu_3)} &= \frac{1}{3!}\sum_\pi T_{\mu_{\pi(1)}\mu_{\pi(2)}\mu_{\pi(3)}} \\
&= \frac{1}{6}(T_{\mu_1\mu_2\mu_3} + T_{\mu_2\mu_3\mu_1} + T_{\mu_3\mu_1\mu_2} + T_{\mu_2\mu_1\mu_3} + T_{\mu_3\mu_2\mu_1} + T_{\mu_1\mu_3\mu_2}) \\
T_{[\mu_1\mu_2\mu_3]} &= \frac{1}{3!}\sum_\pi \delta_\pi T_{\mu_{\pi(1)}\mu_{\pi(2)}\mu_{\pi(3)}} \\
&= \frac{1}{6}(T_{\mu_1\mu_2\mu_3} + T_{\mu_2\mu_3\mu_1} + T_{\mu_3\mu_1\mu_2} - T_{\mu_2\mu_1\mu_3} - T_{\mu_3\mu_2\mu_1} - T_{\mu_1\mu_3\mu_2})
\end{aligned}
\tag{3.2.55}
$$

采用这一套符号,使得张量运算的表述比较简洁,从而简化推演过程。以后(特别是引进黎曼张量之后)可以看出这种表述的优越性。

我们再举几个对称与反对称张量运算的例子,以便获得更直观的认识。设有张量 $T_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta}$,则

$$
\begin{aligned}
T_{[\mu\nu]}{}^{\alpha\beta} &= \frac{1}{2!}(T_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta} - T_{\nu\mu}{}^{\alpha\beta}) \\
T_{(\mu\nu)}{}^{\alpha\beta} &= \frac{1}{2!}(T_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta} + T_{\nu\mu}{}^{\alpha\beta}) \\
T_{\mu\nu}{}^{[\alpha\beta]} &= \frac{1}{2!}(T_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta} - T_{\nu\mu}{}^{\beta\alpha}) \\
T_{\mu\nu}{}^{(\alpha\beta)} &= \frac{1}{2!}(T_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta} + T_{\nu\mu}{}^{\alpha\beta}) \\
T_{[\mu\nu}{}^{\alpha]\beta} &= \frac{1}{3!}(T_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta} + T_{\alpha\mu}{}^{\nu\beta} + T_{\nu\alpha}{}^{\mu\beta} - T_{\nu\mu}{}^{\alpha\beta} - T_{\mu\alpha}{}^{\nu\beta} - T_{\alpha\nu}{}^{\mu\beta}) \\
T_{(\mu\nu}{}^{\alpha)\beta} &= \frac{1}{3!}(T_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta} + T_{\alpha\mu}{}^{\nu\beta} + T_{\nu\alpha}{}^{\mu\beta} + T_{\nu\mu}{}^{\alpha\beta} + T_{\mu\alpha}{}^{\nu\beta} + T_{\alpha\nu}{}^{\mu\beta})
\end{aligned}
\tag{3.2.56}
$$

如果我们只对指标 μ 和 α 取对称或反对称运算,则可采用下面的表述:

$$T_{(\mu|\nu|}{}^{\alpha)\beta} = \frac{1}{2!}(T_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta} + T_{\alpha\nu}{}^{\mu\beta})$$

$$T_{[\mu|\nu|}{}^{\alpha]\beta} = \frac{1}{2!}(T_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta} - T_{\alpha\nu}{}^{\mu\beta}) \tag{3.2.57}$$

其中,夹在两竖||中间的指标 ν 不参与运算。如果给定一张量方程

$$A_{\mu\nu}B^{\alpha\beta} = T_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta} \tag{3.2.58}$$

则有

$$A_{(\mu\nu)}B^{\alpha\beta} = T_{(\mu\nu)}{}^{\alpha\beta}$$
$$A_{[\mu\nu]}B^{\alpha\beta} = T_{[\mu\nu]}{}^{\alpha\beta}$$
$$A_{[\mu\nu}B^{\alpha]\beta} = T_{[\mu\nu}{}^{\alpha]\beta}$$
$$A_{(\mu\nu}B^{|\alpha|\beta)} = T_{(\mu\nu}{}^{|\alpha|\beta)} \tag{3.2.59}$$

等等。

3.2.5 张量密度

满足变换律(3.2.38)的量称为张量。如果一个量 **W**,其变换规律比张量的变换规律多出一个因子 J,则称 J 为张量密度。比如,**W** 的变换律如下:当 x^μ 变为 x'^μ 时,**W** 的分量变为

$$W'^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l} = J\frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\sigma_1}}\cdots\frac{\partial x'^{\mu_k}}{\partial x^{\sigma_k}}\frac{\partial x^{\rho_1}}{\partial x'^{\nu_1}}\cdots\frac{\partial x^{\rho_l}}{\partial x'^{\nu_l}}W^{\sigma_1\cdots\sigma_k}{}_{\rho_1\cdots\rho_l} \tag{3.2.60}$$

则将 J 称为张量密度。令 $k = l = 0$,则得到标量密度的概念。比如,度规张量 $g_{\mu\nu}$的行列式 $|g_{\mu\nu}|$ 就具有标量密度 $|\partial x^\mu/\partial x'^\nu|^2$。真正的标量(像 2π,137,真空光速 c 等)是不变量。为了证实 $|g_{\mu\nu}|$ 具有标量密度,我们考察 $g_{\mu\nu}$的变换式

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}g_{\rho\sigma} = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu}g_{\rho\sigma}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \tag{3.2.61}$$

这里需要指出,$g_{\mu\nu}$的张量密度为 1,因为 $g_{\mu\nu}$本身是张量。取方程(3.2.61)的行列式

$$g' = |\partial x^\mu/\partial x'^\nu|^2 g \tag{3.2.62}$$

这就证明了 g 具有标量密度 $|\partial x^\mu/\partial x'^\nu|^2$($g$ 和 g'分别是 $g_{\mu\nu}$和 $g'_{\mu\nu}$的行列式的负值)。

张量密度的重要性在于积分运算。比如，对于体积元 d^4x，在变换 $x \to x'$ 下，d^4x 变为

$$d^4x' = \left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right| d^4x \tag{3.2.63}$$

但如果考虑体积元 $\sqrt{g}d^4x$，则它是不变量：

$$d\tau' \equiv \sqrt{g'}d^4x' = \left|\frac{\partial x}{\partial x'}\right| \sqrt{g} \left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right| d^4x = \sqrt{g}d^4x \equiv d\tau \tag{3.2.64}$$

张量代数的运算法则可以推广到包含张量密度的情形：

(1)具有相同张量密度并且具有相同上下指标的两个量的线性组合仍然具有相同的张量密度和上下指标。

(2)分别具有张量密度因子 J_1 和 J_2 的两个量的直积构成一个具有张量密度 J_1+J_2 的新的量，其上下指标是先前两个量的上下指标的和。

(3)具有张量密度 J 的一个量的上下指标的缩并不改变张量密度。

3.2.6　导数算子与平行移动

一个曲面嵌入到更高维的空间之后，我们可以研究它的曲率。但高斯发明了一种方法，就是研究曲面的内禀性质，无须将曲面嵌入到更高维的空间中去。关于流形的研究，就是高斯思想的发展。流形本身，可以是一个曲面，也可以是某种空间，它无须嵌入到更高维的空间(或流形)中。因此，我们希望在流形自身中建立一种内禀方法，来描述曲率、平行移动等概念。欧氏平直空间中的曲率为零，这是众所周知的。但一般说来，一个曲面流形的曲率不为零。因此，曲率决定了空间的性质。空间中的一条测地线，走“尽可能直”的一条曲线。从物理学的角度来看，在空间 **M** 中自由运动的一个粒子所走的轨迹就是一条测地线。假如粒子从空间中 A 点自由运动到 B 点，那么，粒子从 A 行进到 B 所历经的时间取极值(费马原理)，由此可得出由 A 到 B 的测地线。空间的性质不同，测地线也不同。在平直空间(欧氏空间)中，测地线是直线。从数学观点来看，测地线是一

条曲线,其切矢量沿自身作平行移动(平行移动概念见后)。因此,我们说一个空间是弯曲的,当且仅当最初平行的测地线不能一直保持平行,即欧几里得几何的第五公设不成立。尽管在流形空间中可以研究平行移动,但如果不附加更多的结构,平行移动往往不能唯一确定。只要给流形赋予了度规 $g_{\mu\nu}$,才可唯一地确定平行移动。一个简单的例子就是,如果 $g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}(\mu,\nu=0,1,2,3)$,则得到闵可夫斯基平直空间,在这个空间中的平行移动是众所周知的。下面我们首先在一般的流形 $\boldsymbol{M}$ 中建立导数算子概念,然后限定在赋予度规 $g_{\mu\nu}$ 的空间之中。

流形 $\boldsymbol{M}$ 上的一个导数算子 ∇_c(有时也称之为协变导数),是从张量空间 $\mathbf{T}(k,l)$ 到张量空间 $U(k,l+1)$ 的映射,满足如下五个条件:

(1)线性　对 $\forall A,B\in \boldsymbol{T}(k,l)$ 以及 $a,b\in\mathbf{R}$,

$$\nabla_c(aA^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l}+bB^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l})=a\ \nabla_cA^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l}+b\ \nabla_cB^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l} \tag{3.2.65}$$

(2)莱布尼兹法则　对 $\forall A\in\boldsymbol{T}(k,l)$,$B\in\boldsymbol{T}(k',l')$

$$\nabla_c[A^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l}B^{\alpha_1\cdots\alpha_{k'}}{}_{\beta_1\cdots\beta_{l'}}]=[\nabla_cA^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l}]B^{\alpha_1\cdots\alpha_{k'}}{}_{\beta_1\cdots\beta_{l'}}+A^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l}[\nabla_cB^{\alpha_1\cdots\alpha_{k'}}{}_{\beta_1\cdots\beta_{l'}}] \tag{3.2.66}$$

(3)与缩并对易　对 $\forall A\in\mathbf{T}(k,l)$

$$\nabla_c(A^{\mu_1\cdots\sigma\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\sigma\cdots\nu_l})=\nabla_cA^{\mu_1\cdots\sigma\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\sigma\cdots\nu_l} \tag{3.2.67}$$

等式左边是先对指标 σ 缩并后再进行 ∇_c 运算,等式右边则表示先作 ∇_c 运算然后再对指标 σ 缩并。

(4)作用在标量场时与方向导数概念一致　对 $\forall f\in\boldsymbol{F}$($\boldsymbol{F}$ 是由流形 $\boldsymbol{M}$ 映射到 $\mathbf{R}$ 的 C^∞ 函数的集合)以及 $\boldsymbol{T}\in\boldsymbol{V}_P$

$$\boldsymbol{T}(f)=T^\mu\nabla_\mu f \tag{3.2.68}$$

(5)作用在标量场上的对易性　对 $\forall f\in\boldsymbol{F}$,

$$\nabla_a\nabla_b f=\nabla_b\nabla_a f \tag{3.2.69}$$

在广义相对论中,总假定条件(5)满足。但需注意,∇作用在 $\boldsymbol{F}$ 上具有对易性,但作用在 $\boldsymbol{T}(k,l)$ 上则并非具有对易性(一般情况),

这在以后会加以论证。

对于任意两个矢量 $\boldsymbol{V},\boldsymbol{U}\in \mathbf{V}_P$，根据(1)、(4)和(5)可以导出作用在 $f\in \mathbf{F}$ 上的对易子：

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{V},\boldsymbol{U}](f) &= (\boldsymbol{VU}-\boldsymbol{UV})(f) = \boldsymbol{VU}(f)-\boldsymbol{UV}(f)\\ &= \boldsymbol{V}(U^\alpha\nabla_\alpha f)-\boldsymbol{U}(V^\alpha\nabla_\alpha f)\\ &= V^\beta\nabla_\beta(U^\alpha\nabla_\alpha f)-U^\beta\nabla_\beta(V^\alpha\nabla_\alpha f)\\ &= (V^\beta\nabla_\beta U^\alpha-U^\beta\nabla_\beta V^\alpha)\nabla_\alpha(f)\end{aligned} \tag{3.2.70}$$

由上边定义的导数算子肯定存在。比如，普通导数算子 ∂_μ（$\partial_\mu\equiv\partial/\partial x^\mu$）就满足定义中的所有条件。但由上述定义给出的算子 ∇是不唯一的。假定 ∇_μ 和 $\tilde{\nabla}_\mu$ 是满足前面定义的导数算子，可以证明(Wald，1984)，当 ∇_μ 和 $\tilde{\nabla}_\mu$ 作用于对偶矢量空间 $\mathbf{V}_p^*$ 中的任意一个对偶矢量 W_μ（也称协变矢量）时，二者之间的关系由下式给出

$$\nabla_\mu W_\nu = \tilde{\nabla}_\mu W_\nu - C^\lambda{}_{\mu\nu}W_\lambda \tag{3.2.71}$$

这里需注意，$C^\lambda{}_{\mu\nu}$不一定是张量，这在以后证明。但 $C^\lambda{}_{\mu\nu}$关于指标 μ 和 ν 是对称的。为了证实这一点，根据定义中的条件(4)（即方程(3.2.68)），可令 $W_\mu=\nabla_\mu f$，这时 $\tilde{\nabla}_\mu f$ 也必定等于 W_μ，即有

$$W_\mu = \nabla_\mu f = \tilde{\nabla}_\mu f \tag{3.2.72}$$

将上式代入方程(3.2.71)得

$$\nabla_\mu\nabla_\nu f = \tilde{\nabla}_\mu\tilde{\nabla}_\nu f - C^\lambda{}_{\mu\nu}W_\lambda \tag{3.2.73}$$

又根据方程(3.2.69)（即定义中的条件(5)），上式又可写成

$$\nabla_\nu\nabla_\mu = f\ \tilde{\nabla}_\nu\nabla_\mu f - C^\lambda{}_{\mu\nu}W_\lambda \tag{3.2.74}$$

将 μ 与 ν 指标交换，得

$$\nabla_\mu\nabla_\nu f = \tilde{\nabla}_\mu\nabla_\nu f - C^\lambda{}_{\nu\mu}W_\lambda \tag{3.2.75}$$

由方程(3.2.73)和方程(3.2.75)得

$$C^\lambda{}_{\mu\nu}W_\lambda = C^\lambda{}_{\nu\mu}W_\lambda \tag{3.2.76}$$

由于 W_λ 是任意对偶矢量，因此

$$C^\lambda{}_{\mu\nu} = C^\lambda{}_{\nu\mu} \tag{3.2.77}$$

方程(3.2.71)给出了导数算子 ∇ 作用于对偶矢量空间的结果,同时也决定了算子 ∇ 和 $\tilde{\nabla}$ 作用在任意阶张量空间(包括矢量空间和对偶矢量空间)上的差异。比如,考虑 $\tilde{\nabla}-\nabla$ 作用于矢量 $\boldsymbol{T}\in\mathbf{V}_P$ 上的结果。由莱布尼兹法则

$$(\tilde{\nabla}_\mu-\nabla_\mu)(W_\nu T^\nu)=[(\tilde{\nabla}_\mu-\nabla_\mu)W_\nu]T^\nu+W_\nu(\tilde{\nabla}_\mu-\nabla_\mu)T^\nu$$
$$=C^\lambda{}_{\mu\nu}W_\lambda T^\nu+W_\nu(\tilde{\nabla}_\mu-\nabla_\mu)T^\nu \tag{3.2.78}$$

方程(3.2.68)告诉我们,$(\tilde{\nabla}_\mu-\nabla_\mu)(W_\nu T^\nu)=0$,因此

$$W_\nu(\tilde{\nabla}_\mu-\nabla_\mu)T^\nu+W_\lambda C^\lambda{}_{\mu\nu}T^\nu=0 \tag{3.2.79}$$

上式又可写成

$$W_\nu[(\tilde{\nabla}_\mu-\nabla_\mu)T^\nu+C^\nu{}_{\mu\lambda}T^\lambda]=0 \tag{3.2.80}$$

由于 W_ν 任意,因此

$$\nabla_\mu T^\nu=\tilde{\nabla}_\mu T^\nu+C^\nu{}_{\mu\lambda}T^\lambda \tag{3.2.81}$$

根据完全类似的推导,利用方程(3.2.71)和方程(3.2.81)可以导出 $\tilde{\nabla}-\nabla$ 作用于张量空间 $\boldsymbol{T}(k,l)$ 中的任意一个张量 $T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l}$ 上的结果。于是,我们可写出

$$\nabla_\mu T^{\alpha_1\cdots\alpha_k}{}_{\beta_1\cdots\beta_l}=\tilde{\nabla}_\mu T^{\alpha_1\cdots\alpha_k}{}_{\beta_1\cdots\beta_l}+\sum_{i=1}^{k}C^{\alpha_i}{}_{\mu\sigma}T^{\alpha_1\cdots\alpha_{i-1}\sigma\alpha_{i+1}\cdots\alpha_k}{}_{\beta_1\cdots\beta_l}$$
$$-\sum_{j=1}^{l}C^\sigma{}_{\mu\beta_j}T^{\alpha_1\cdots\alpha_k}{}_{\beta_1\cdots\beta_{j-1}\sigma\beta_{j+1}\cdots\beta_l} \tag{3.2.82}$$

方程(3.2.82)有一个重要的应用,那就是令 $\tilde{\nabla}_\mu$ 为普通偏导数算子 ∂_μ 的情形。当 ∇_μ 作用于任意一矢量 $\boldsymbol{T}\in\mathbf{V}_P$ 时,若取 $\tilde{\nabla}_\mu=\partial_\mu$,则

$$\nabla_\mu T^\nu=\partial_\mu T^\nu+\Gamma^\nu{}_{\mu\lambda}T^\lambda \tag{3.2.83}$$

$\Gamma^\nu{}_{\mu\lambda}$ 即为曾经提到的仿射联络,或称 Christoffel 符号。

导数算子作用于对偶矢量空间、矢量空间乃至一般张量空间的

结果，即式(3.2.71)、式(3.2.81)以及式(3.2.83)，具有重要的理论及应用价值，以后会经常用到。

给定了导数算子 ∇_μ，我们可以定义矢量 $\boldsymbol{V}$ 沿着具有切矢量 T^μ 的曲线 C(C 是流形 $\boldsymbol{M}$ 中的曲线)的平行移动。说一个矢量 $\boldsymbol{V}$ 沿曲线 C 作平行移动，是指下列方程成立

$$T^\mu \nabla_\mu V^\nu = 0 \tag{3.2.84}$$

一般地，说一个张量 $S^{\alpha_1\cdots\alpha_k}{}_{\beta_1\cdots\beta_l}$ 沿曲线 C 作平行移动，是指满足

$$T^\mu \nabla_\mu S^{\alpha_1\cdots\alpha_k}{}_{\beta_1\cdots\beta_l} = 0 \tag{3.2.85}$$

在广义相对论中，我们一般只考虑矢量的平行移动。由方程(3.2.84)和方程(3.2.83)得

$$T^\mu \partial_\mu V^\nu + T^\mu \Gamma^\nu{}_{\mu\lambda} V^\lambda = 0 \tag{3.2.86}$$

由方程(3.2.29)，以时间 t 为参数，场矢量 T^μ 可表示成

$$T^\mu = \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t} \tag{3.2.87}$$

因此，方程(3.2.86)可写成

$$\frac{\mathrm{d}V^\nu}{\mathrm{d}t} + T^\mu \Gamma^\nu{}_{\mu\lambda} V^\lambda = 0 \tag{3.2.88}$$

这个方程就是矢量 V^ν 沿曲线 C 的平行移动方程。

然而，前面已经指出，仅仅给定了流形结构还不能唯一地确定平行移动，因为 $\Gamma^\nu{}_{\mu\lambda}$ 不能唯一确定。为此，我们在流形 $\boldsymbol{M}$ 中引进度规张量 $g_{\mu\nu}$。这里，$g_{\mu\nu}$ 由表述不变原时 $\mathrm{d}\tau$ 的方程(3.1.12)确定，其中 x^μ 是任意坐标。由于矢量 V^μ 和 U^ν 的直积是张量 $V^\mu U^\nu$，因此，$g_{\mu\nu} V^\mu U^\nu$ 是无指标张量，因而是一标量；这个量沿曲线 C 的平行移动应该保持不变。为此，我们要求

$$T^\lambda \nabla_\lambda (g_{\mu\nu} V^\mu U^\nu) = 0 \tag{3.2.89}$$

其中 V^μ 和 U^ν 满足平行移动方程(3.2.84)。由莱布尼兹法则，注意到方程(3.2.84)，方程(3.2.89)可写成

$$T^\lambda V^\mu U^\nu \nabla_\lambda g_{\mu\nu} = 0 \tag{3.2.90}$$

由于 T^λ, V^μ, U^ν 是任意的，方程(3.2.90)成立的充分必要条件是

$$\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = 0 \tag{3.2.91}$$

算子 ∇_λ 附加上条件(3.2.91)之后就被唯一确定了。为了证实这一

点，假定 $\tilde{\nabla}_{\lambda}$ 是任意算子，我们要证明，给定了 $\tilde{\nabla}_{\lambda}$，则 $C^{\sigma}{}_{\mu\nu}$唯一确定，从而确定了算子 ∇_{λ}。由方程(3.2.82)和方程(3.2.91)，有

$$0 = \nabla_{\lambda}g_{\mu\nu} = \tilde{\nabla}_{\lambda}g_{\mu\nu} - C^{\sigma}{}_{\lambda\nu}g_{\mu\sigma} - C^{\sigma}{}_{\lambda\mu}g_{\sigma\nu} \quad (3.2.92)$$

令

$$C_{\mu\lambda\nu} = g_{\mu\sigma}C^{\sigma}{}_{\lambda\nu}, \quad C_{\nu\lambda\mu} = g_{\sigma\nu}C^{\sigma}{}_{\lambda\mu} \quad (3.2.93)$$

则

$$C_{\mu\lambda\nu} + C_{\nu\lambda\mu} = \tilde{\nabla}_{\nu}\nu_{\mu\nu} \quad (3.2.94)$$

轮换上述方程中各量的指标，同样有

$$C_{\mu\nu\lambda} + C_{\lambda\nu\mu} = \tilde{\nabla}_{\nu}g_{\mu\lambda} \quad (3.2.95)$$

$$C_{\nu\mu\lambda} + C_{\lambda\mu\nu} = \tilde{\nabla}_{\mu}g_{\nu\lambda} \quad (3.2.96)$$

注意到 $g_{\mu\nu}$是对称的，$C_{\mu\nu\lambda}$关于后面两个指标 $\nu\lambda$ 对称(只要考察一下方程(3.2.93)即知)，因此，由方程(3.2.94)～(3.2.96)得

$$(C_{\mu\lambda\nu} + C_{\nu\lambda\mu}) + (C_{\mu\lambda\nu} + C_{\lambda\mu\nu}) - (C_{\nu\lambda\mu} + C_{\lambda\mu\nu})$$
$$= \tilde{\nabla}_{\lambda}g_{\mu\nu} + \tilde{\nabla}_{\nu}g_{\lambda\mu} - \tilde{\nabla}_{\mu}g_{\lambda\nu} \quad (3.2.97)$$

即

$$2C_{\mu\lambda\nu} = \tilde{\nabla}_{\lambda}g_{\mu\nu} + \tilde{\nabla}_{\nu}g_{\lambda\mu} - \tilde{\nabla}_{\mu}g_{\lambda\nu} \quad (3.2.98)$$

根据方程(3.2.93)，上式又可写成

$$g_{\mu\sigma}C^{\sigma}{}_{\lambda\nu} = \frac{1}{2}(\tilde{\nabla}_{\lambda}g_{\mu\nu} + \tilde{\nabla}_{\nu}g_{\lambda\mu} - \tilde{\nabla}_{\mu}g_{\lambda\nu}) \quad (3.2.99)$$

在上式两边同时作用 $g^{\rho\mu}$，得

$$\delta^{\rho}{}_{\sigma}C^{\sigma}{}_{\lambda\nu} = \frac{1}{2}g^{\rho\mu}(\tilde{\nabla}_{\lambda}g_{\mu\nu} + \tilde{\nabla}_{\nu}g_{\lambda\mu} - \tilde{\nabla}_{\mu}g_{\lambda\nu}) \quad (3.2.100)$$

故有

$$C^{\lambda}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}(\tilde{\nabla}_{\mu}g_{\sigma\nu} + \tilde{\nabla}_{\nu}g_{\sigma\mu} - \tilde{\nabla}_{\sigma}g_{\mu\nu}) \quad (3.2.101)$$

上式表明，给定了度规 $g_{\mu\nu}$和算子 $\tilde{\nabla}_{\lambda}$ 之后，$C^{\sigma}{}_{\mu\nu}$便唯一确定了，因而也就唯一地确定了 ∇_{λ}。

给定了度规 $g_{\mu\nu}$之后，由上述方式确定的算子 ∇_{λ} 称为自然算

子。本书以后的部分，只要引进度规 $g_{\mu\nu}$，均假定 ∇_λ 是自然算子。

有一种特殊的自然算子，那就是当 $\tilde{\nabla}_\lambda$ 取普通偏导数 ∂_λ 时的算子，称之为协变导数算子，记作 D_λ。这时，对应的 $C^\lambda{}_{\mu\nu}$就是 Christoffel 符号 $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$（也即仿射联络）。于是，$\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$可表示成

$$\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}(\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu})$$
$$\equiv \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}\left(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}\right) \tag{3.2.102}$$

采用协变导数算子，方程(3.2.82)可写成

$$D_\mu T^{\alpha_1\cdots\alpha_k}{}_{\beta_1\cdots\beta_l} = \partial_\mu T^{\alpha_1\cdots\alpha_k}{}_{\beta_1\cdots\beta_l} + \sum_{i=1}^{k}\Gamma^{\alpha_i}{}_{\mu\sigma}T^{\alpha_1\cdots\alpha_{i-1}\sigma\alpha_{i+1}\cdots\alpha_k}{}_{\beta_1\cdots\beta_l}$$
$$- \sum_{j=1}^{l}\Gamma^\sigma{}_{\mu\beta_j}T^{\alpha_1\cdots\alpha_k}{}_{\beta_1\cdots\beta_{j-1}\sigma\beta_{j+1}\cdots\beta_l} \tag{3.2.103}$$

3.2.7 仿射联络的变换

下面要证明，$\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$看起来像张量，但实际上并不是，也即 $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$不满足张量变换律。由于 $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$是 $C^\lambda{}_{\mu\nu}$的特例，因此也就证实了 $C^\lambda{}_{\mu\nu}$不一定是张量的结论（参见方程(3.2.101)及其特例，即方程(3.2.102)）。为了证明这一点，由方程(3.2.102)，注意到 $g^{\mu\nu}$和 $g_{\mu\nu}$是张量，从坐标 x^μ 变换到 x'^μ 之后，有

$$\Gamma'^\lambda{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g'^{\lambda\sigma}\left(\frac{\partial g'_{\nu\sigma}}{\partial x'^\mu} + \frac{\partial g'_{\mu\sigma}}{\partial x'^\nu} - \frac{\partial g'_{\mu\nu}}{\partial x'^\sigma}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\beta}g^{\alpha\beta}\left[\frac{\partial}{\partial x'^\mu}\left(\frac{\partial x^\zeta}{\partial x'^\nu}\frac{\partial x^\eta}{\partial x'^\sigma}g_{\zeta\eta}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial x'^\nu}\left(\frac{\partial x^\zeta}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\eta}{\partial x'^\sigma}g_{\zeta\eta}\right) - \frac{\partial}{\partial x'^\sigma}\left(\frac{\partial x^\zeta}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\eta}{\partial x'^\nu}g_{\zeta\eta}\right)\right]$$
$$= P^\lambda{}_{\mu\nu} + Q^\lambda{}_{\mu\nu} + R^\lambda{}_{\mu\nu} \tag{3.2.104}$$

其中

$$P^\lambda{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\beta}g^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial^2 x^\zeta}{\partial x'^\mu\partial x'^\nu}\frac{\partial x^\eta}{\partial x'^\sigma} + \frac{\partial x^\zeta}{\partial x'^\nu}\frac{\partial^2 x^\eta}{\partial x'^\mu\partial x'^\sigma}\right)g_{\zeta\eta}$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\beta}}g^{\alpha\beta}\frac{\partial x^{\zeta}}{\partial x'^{\nu}}\frac{\partial x^{\eta}}{\partial x'^{\sigma}}\frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial g_{\zeta\eta}}{\partial x^{\rho}}$$

$$=\cdots+\frac{1}{2}\frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}}\delta^{\eta}{}_{\beta}g^{\alpha\beta}\frac{\partial x^{\zeta}}{\partial x'^{\nu}}\frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial g_{\zeta\eta}}{\partial x^{\rho}}$$

$$=\cdots+\frac{1}{2}\frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x^{\zeta}}{\partial x'^{\nu}}\frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}}g^{\alpha\eta}\frac{\partial g_{\zeta\eta}}{\partial x^{\rho}} \tag{3.2.105a}$$

$$Q^{\lambda}{}_{\mu\nu}=\frac{1}{2}\frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\beta}}g^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial^2 x^{\zeta}}{\partial x'^{\nu}\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^{\eta}}{\partial x'^{\sigma}}+\frac{\partial x^{\zeta}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial^2 x^{\eta}}{\partial x'^{\nu}\partial x'^{\sigma}}\right)g_{\zeta\eta}$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\beta}}g^{\alpha\beta}\frac{\partial x^{\zeta}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^{\eta}}{\partial x'^{\sigma}}\frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}}\frac{\partial g_{\zeta\eta}}{\partial x^{\rho}}$$

$$=\cdots+\frac{1}{2}\frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x^{\zeta}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}}g^{\alpha\rho}\frac{\partial g_{\zeta\eta}}{\partial x^{\rho}} \tag{3.2.105b}$$

$$R^{\lambda}{}_{\mu\nu}=-\frac{1}{2}\frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\beta}}g^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial^2 x^{\zeta}}{\partial x'^{\sigma}\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^{\eta}}{\partial x'^{\nu}}+\frac{\partial x^{\zeta}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial^2 x^{\eta}}{\partial x'^{\nu}\partial x'^{\sigma}}\right)g_{\zeta\eta}$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\beta}}g^{\alpha\beta}\frac{\partial x^{\zeta}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^{\eta}}{\partial x'^{\nu}}\frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\sigma}}\frac{\partial g_{\zeta\eta}}{\partial x^{\rho}}$$

$$=\cdots+\frac{1}{2}\frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x^{\zeta}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^{\eta}}{\partial x'^{\nu}}g^{\alpha\eta}\frac{\partial g_{\zeta\eta}}{\partial x^{\rho}} \tag{3.2.105c}$$

将方程(3.2.105)代入方程(3.2.104),得

$$\Gamma'^{\lambda}{}_{\mu\nu}=\frac{1}{2}\frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\beta}}g^{\alpha\beta}\left[\frac{\partial^2 x^{\zeta}}{\partial x'^{\mu}\partial x'^{\nu}}\frac{\partial x^{\eta}}{\partial x'^{\sigma}}+\frac{\partial x^{\zeta}}{\partial x'^{\nu}}\frac{\partial^2 x^{\eta}}{\partial x'^{\mu}\partial x'^{\sigma}}+\frac{\partial^2 x^{\zeta}}{\partial x'^{\nu}\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^{\eta}}{\partial x'^{\sigma}}\right.$$

$$\left.+\frac{\partial x^{\zeta}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial^2 x^{\eta}}{\partial x'^{\nu}\partial x'^{\sigma}}-\frac{\partial^2 x^{\zeta}}{\partial x'^{\sigma}\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^{\eta}}{\partial x'^{\nu}}-\frac{\partial x^{\zeta}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial^2 x^{\eta}}{\partial x'^{\sigma}\partial x'^{\nu}}\right]g_{\zeta\eta}$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x^{\zeta}}{\partial x'^{\nu}}\frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}}g^{\alpha\eta}\frac{\partial g_{\zeta\eta}}{\partial x^{\rho}}+\frac{1}{2}\frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x^{\zeta}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}}g^{\alpha\eta}\frac{\partial g_{\zeta\eta}}{\partial x^{\rho}}$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x^{\zeta}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^{\eta}}{\partial x'^{\nu}}g^{\alpha\rho}\frac{\partial g_{\zeta\eta}}{\partial x^{\rho}}$$

$$=\frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\beta}}g^{\alpha\beta}\frac{\partial^2 x^{\zeta}}{\partial x'^{\mu}\partial x'^{\nu}}\frac{\partial x^{\eta}}{\partial x'^{\sigma}}g_{\zeta\eta}+\frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x^{\zeta}}{\partial x'^{\nu}}\frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}}\frac{1}{2}g^{\alpha\eta}\left[\frac{\partial g_{\zeta\eta}}{\partial x^{\rho}}\right.$$

$$\left.+\frac{\partial g_{\rho\eta}}{\partial x^{\zeta}}-\frac{\partial g_{\rho\zeta}}{\partial x^{\eta}}\right]$$

$$= \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial^2 x^{\zeta}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu}} g^{\alpha\eta} g_{\zeta\eta} + \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\zeta}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} \Gamma^{\alpha}{}_{\zeta\rho}$$

$$= \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\zeta}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} \Gamma^{\alpha}{}_{\zeta\rho} + \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu}} \tag{3.2.106}$$

从上式可以看出，$\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}$的变换比张量变换律多出了一项

$$\frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu}} \tag{3.2.107}$$

因此，$\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}$不是张量。同时，方程(3.2.106)给出了仿射联络$\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}$的变换律。如果注意到

$$\frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\nu}} = \delta^{\lambda}{}_{\nu} \tag{3.2.108}$$

对x'^{μ}微分上式

$$\frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu}} = -\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial^2 x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho} \partial x^{\alpha}} \tag{3.2.109}$$

则变换律(3.2.106)又可写成

$$\Gamma'^{\lambda}{}_{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\zeta}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} \Gamma^{\alpha}{}_{\zeta\rho} - \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial^2 x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho} \partial x^{\alpha}} \tag{3.2.110}$$

度规$g_{\mu\nu}$满足方程(3.1.12)

$$d\tau^2 = -g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} \tag{A}$$

而$d\tau^2$是不变量。在局部惯性系中

$$d\tau^2 = -\eta_{\mu\nu} d\xi^{\mu} d\xi^{\nu} \tag{B}$$

设ξ^{μ}是x^{μ}的函数，则由(A)和(B)可导出方程(3.1.13)

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial x^{\nu}} \tag{3.2.111}$$

又(参见方程(3.1.28))

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\alpha\beta} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \xi^{\alpha}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \xi^{\beta}} \tag{3.2.112}$$

将以上二式代入方程(3.2.102)，得

$$\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \xi^{\alpha}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial \xi^{\beta}} \left[\eta_{\rho\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \left(\frac{\partial \xi^{\rho}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial \xi^{\varepsilon}}{\partial x^{\sigma}} \right) + \eta_{\rho\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \left(\frac{\partial \xi^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial \xi^{\varepsilon}}{\partial x^{\sigma}} \right) - \eta_{\rho\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x^{\sigma}} \left(\frac{\partial \xi^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial \xi^{\varepsilon}}{\partial x^{\nu}} \right) \right]$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \xi^{\alpha}}\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial \xi^{\beta}} \cdot 2\eta_{\rho\varepsilon}\frac{\partial^2 \xi^{\rho}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\nu}}\frac{\partial \xi^{\varepsilon}}{\partial x^{\sigma}} \\
&= \eta^{\alpha\beta}\eta_{\rho\varepsilon}\delta_{\beta}{}^{\varepsilon}\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \xi^{\alpha}}\frac{\partial^2 \xi^{\rho}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\nu}} = \delta^{\alpha}{}_{\rho}\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \xi^{\alpha}}\frac{\partial^2 \xi^{\rho}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\nu}} \\
&= \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \xi^{\alpha}}\frac{\partial^2 \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\nu}}
\end{aligned} \tag{3.2.113}
$$

上述表达式正好与方程(3.1.9)一致。可见,仿射联络有两种表述形式,其一是方程(3.1.9),其二是方程(3.2.102),二者是等价的。二者之所以等价,是因为它们由度规 $g_{\mu\nu}$ 联络了起来。方程(3.1.9)是根据等效原理得到的,其中没有用到空间流形、导数算子、平行移动等概念。而方程(3.2.102)是在流形空间中赋予了度规 $g_{\mu\nu}$ 之后,应用纯几何方法得到的,其中没有涉及引力概念。由此可见,引力效应与空间弯曲具有惊人的相似之处,以致不少物理学家(包括数学家)认为引力理论实际上是弯曲空间中的几何理论,或者说,是赋予了度规的流形上的几何理论。

3.2.8 曲率与黎曼张量

前面我们曾经建立了导数算子以及平行移动的概念。在平直空间(度规的对角元为 1 或 -1,其他非对角元为零)中,平行移动与路径无关。但在非平直空间中,平行移动依赖于路径。反过来,我们可以利用平行移动的这种"依赖性"定义流形空间的内禀曲率。当曲率为零时,平行移动与路径无关。当曲率不为零时,平行移动与路径有关。

设 ∇_{μ} 是导数算子, W_{μ} 是对偶矢量,则($\nabla_{\mu}\nabla_{\nu} - \nabla_{\nu}\nabla_{\mu}$)定义了一个从对偶矢量空间 $\mathbf{V}_p^*$ 到(0,3)型张量空间 $\boldsymbol{T}(0,3)$ 的一个映射(Wald,1984)

$$
(\nabla_{\mu}\nabla_{\nu} - \nabla_{\nu}\nabla_{\mu})W_{\lambda} = R_{\mu\nu\lambda}{}^{\alpha}W_{\alpha} \tag{3.2.114}
$$

其中 $R_{\mu\nu\lambda}{}^{\alpha}$ 称为黎曼曲率(这里我们并不事先假定 $R_{\mu\nu\lambda}{}^{\alpha}$ 是张量,因为由算子 ∇_{μ} 定义的量未必就是张量,在上一节曾经有过例子,比如, $\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}$由协变算子 D_{μ} 定义,但并不是张量)。

$\nabla_{\mu}\nabla_{\nu} - \nabla_{\nu}\nabla_{\mu}$ 是 ∇_{μ} 和 ∇_{ν} 的对易子,一般记为[∇_{μ}, ∇_{ν}],故有

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]W_\lambda = R_{\mu\nu\lambda}{}^\alpha W_\alpha \qquad (3.2.115)$$

上述方程表明，∇_μ 和 ∇_ν 的对易子作用于对偶矢量之后(一般地)不为零，这个性质由黎曼曲率 $R_{\mu\nu\lambda}{}^\alpha$ 刻画。这里需注意，根据导数算子的定义(见方程(3.2.65)~(3.2.69))，对易子$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]$作用于光滑函数 $f\in \mathbf{F}$($\mathbf{F}$ 是从流形 M 到实数域 $\mathbf{R}$ 的 C^∞ 函数的集合)时为零。

方程(3.2.115)是基本方程，由此可导出对易子$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]$对一般张量的作用结果。对矢量 $T_\mu\in \mathbf{V}_p$ 的作用结果如下(注意 $T^\alpha W_\alpha$ 是标量函数)

$$\begin{aligned}
0 &= [\nabla_\mu, \nabla_\nu](T^\alpha W_\alpha) \\
&= \nabla_\mu(W_\alpha\nabla_\nu T^\alpha + T^\alpha\nabla_\nu W_\alpha) - \nabla_\nu(W_\alpha\nabla_\mu T^\alpha + T^\alpha\nabla_\mu W_\alpha) \\
&= W_\alpha(\nabla_\mu\nabla_\nu T^\alpha - \nabla_\mu\nabla_\nu T^\alpha) + T^\alpha(\nabla_\mu\nabla_\nu W_\alpha - \nabla_\mu\nabla_\nu W_\alpha) \\
&= W_\alpha[\nabla_\mu, \nabla_\nu]T^\alpha + T^\alpha[\nabla_\mu, \nabla_\nu]W_\alpha \\
&= W_\alpha[\nabla_\mu, \nabla_\nu]T^\alpha + T^\alpha R_{\mu\nu\alpha}{}^\beta W_\beta \\
&= W_\alpha\{[\nabla_\mu, \nabla_\nu]T^\alpha + R_{\mu\nu\alpha}{}^\beta T^\beta\}
\end{aligned} \qquad (3.2.116)$$

因此有

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]T^\alpha = -R_{\mu\nu\lambda}{}^\alpha T^\lambda \qquad (3.2.117)$$

一般地，对于任意张量 $T^{\alpha_1\cdots\alpha_k}{}_{\beta_1\cdots\beta_l}$，我们有

$$\begin{aligned}
[\nabla_\mu, \nabla_\nu]T^{\alpha_1\cdots\alpha_k}{}_{\beta_1\cdots\beta_l} = &-\sum_{i=1}^{k} R_{\mu\nu\sigma}{}^{\alpha_i} T^{\alpha_1\cdots\alpha_{i-1}\sigma\alpha_{i+1}\cdots\alpha_k}{}_{\beta_1\cdots\beta_l} \\
&+\sum_{j=1}^{l} R_{\mu\nu\beta_j}{}^{\sigma} T^{\alpha_1\cdots\alpha_k}{}_{\beta_1\cdots\beta_{j-1}\sigma\beta_{j+1}\cdots\beta_l}
\end{aligned}$$

(3.2.118)

黎曼曲率具有如下一些性质：

(a)

$$R_{\mu\nu\lambda}{}^\alpha = -R_{\nu\mu\lambda}{}^\alpha \qquad (3.2.119)$$

这一性质可从黎曼曲率的定义式(3.2.115)直接得出。

(b)引入度规 $g_{\mu\nu}$之后，对于自然算子 ∇_μ，根据方程(3.2.91)，有 $\nabla_\nu g_{\alpha\beta}=0$，因此

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = -R_{\mu\nu\beta\alpha} \qquad (3.2.120)$$

其中

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = R_{\mu\nu\alpha}{}^{\sigma} g_{\sigma\beta} \tag{3.2.121}$$

为了证明方程(3.2.120),只需利用方程(3.2.118)以及条件 $\nabla_\nu g_{\alpha\beta}=0$:

$$0 = [\nabla_\mu, \nabla_\nu] g_{\alpha\beta} = R_{\mu\nu\alpha}{}^{\sigma} g_{\sigma\beta} + R_{\mu\nu\beta}{}^{\sigma} g_{\sigma\alpha} = R_{\mu\nu\alpha\beta} + R_{\mu\nu\beta\alpha} \tag{3.2.122}$$

(c)

$$R_{[\mu\nu\alpha]}{}^{\beta} = 0 \tag{3.2.123}$$

其中 $[\mu\nu\alpha]$ 是指完全反对称表示,故 $R_{[\mu\nu\alpha]}{}^{\beta}$ 实际上可表示成

$$R_{[\mu\nu\alpha]}{}^{\beta} = \frac{1}{6}(R_{\mu\nu\alpha}{}^{\beta} + R_{\nu\alpha\mu}{}^{\beta} + R_{\alpha\mu\nu}{}^{\beta} - R_{\nu\mu\alpha}{}^{\beta} - R_{\alpha\nu\mu}{}^{\beta} - R_{\mu\alpha\nu}{}^{\beta}) \tag{3.2.124}$$

利用性质(a),即方程(3.2.119),得

$$R_{[\mu\nu\alpha]}{}^{\beta} = \frac{1}{3}(R_{\mu\nu\alpha}{}^{\beta} + R_{\nu\alpha\mu}{}^{\beta} + R_{\alpha\mu\nu}{}^{\beta}) \tag{3.2.125}$$

为了证明方程(3.2.123),由方程(3.2.114)对指标 $\mu\nu\lambda$ 作完全反对称运算,得

$$\nabla_{[\mu}\nabla_{\nu}W_{\lambda]} - \nabla_{[\nu}\nabla_{\mu}W_{\lambda]} = R_{[\mu\nu\lambda]}{}^{\alpha}W_{\alpha} \tag{3.2.126}$$

根据算子 ∇_μ 所满足的方程(3.2.71)

$$\nabla_\mu W_\lambda = \tilde{\nabla}_\mu W_\lambda - C^{\sigma}{}_{\mu\lambda} W_\sigma \tag{3.2.127}$$

令 $\nabla_\mu = \partial_\mu$,则

$$\nabla_\mu W_\lambda = \partial_\mu W_\lambda - \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\lambda} W_\alpha \tag{3.2.128}$$

于是

$$\nabla_{[\mu}\nabla_{\nu}W_{\lambda]} = \frac{1}{6}(\nabla_\mu\nabla_\nu W_\lambda + \nabla_\nu\nabla_\lambda W_\mu + \nabla_\lambda\nabla_\mu W_\nu - \nabla_\nu\nabla_\mu W_\lambda - \nabla_\lambda\nabla_\nu W_\mu - \nabla_\mu\nabla_\lambda W_\nu) \tag{3.2.129}$$

或

$$\begin{aligned} 6\nabla_{[\mu}\nabla_{\nu}W_{\lambda]} = {} & \nabla_\mu(\partial_\nu W_\lambda - \Gamma^{\sigma}{}_{\nu\lambda}W_\sigma) + \nabla_\nu(\partial_\lambda W_\mu - \Gamma^{\sigma}{}_{\lambda\mu}W_\sigma) \\ & + \nabla_\lambda(\partial_\mu W_\nu - \Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu}W_\sigma) - \nabla_\nu(\partial_\mu W_\lambda - \Gamma^{\sigma}{}_{\mu\lambda}W_\sigma) \\ & - \nabla_\lambda(\partial_\nu W_\mu - \Gamma^{\sigma}{}_{\nu\mu}W_\sigma) - \nabla_\mu(\partial_\lambda W_\nu - \Gamma^{\sigma}{}_{\lambda\nu}W_\sigma) \end{aligned}$$

(3.2.130)

注意到 $\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu}$ 关于指标 μ 和 ν 对称，因此

$$6\nabla_{[\mu}\nabla_{\nu}W_{\lambda]} = \partial_{\nu}(\nabla_{\mu}W_{\lambda} - \nabla_{\lambda}W_{\mu}) + \partial_{\lambda}(\nabla_{\nu}W_{\mu} - \nabla_{\mu}W_{\nu}) + \partial_{\mu}(\nabla_{\lambda}W_{\nu} - \nabla_{\nu}W_{\lambda}) \tag{3.2.131}$$

又

$$\nabla_{\mu}W_{\lambda} - \nabla_{\lambda}W_{\mu} = \partial_{\mu}W_{\lambda} - \Gamma^{\sigma}{}_{\mu\lambda}W_{\sigma} - (\partial_{\lambda}W_{\mu} - \Gamma^{\sigma}{}_{\lambda\mu}W_{\sigma}) = \partial_{\mu}W_{\lambda} - \partial_{\lambda}W_{\mu} \tag{3.2.132}$$

因此

$$6\nabla_{[\mu}\nabla_{\nu}W_{\lambda]} = \partial_{\nu}(\partial_{\mu}W_{\lambda} - \partial_{\lambda}W_{\mu}) + \partial_{\lambda}(\partial_{\nu}W_{\mu} - \partial_{\mu}W_{\nu}) + \partial_{\mu}(\partial_{\lambda}W_{\nu} - \partial_{\nu}W_{\lambda}) = 0 \tag{3.2.133}$$

同理可证

$$\nabla_{[\nu}\nabla_{\mu}W_{\lambda]} = 0 \tag{3.2.134}$$

将方程(3.2.133)和(3.2.134)代入方程(3.2.126)，便得到方程(3.2.123)。又由方程(3.2.125)，我们得到如下关系式

$$R_{\mu\nu\alpha}{}^{\beta} + R_{\nu\alpha\mu}{}^{\beta} + R_{\alpha\mu\nu}{}^{\beta} = 0 \tag{3.2.135}$$

(d) Bianchi 恒等式

$$\nabla_{[\mu}R_{\nu\alpha]\beta}{}^{\sigma} = 0 \tag{3.2.136}$$

为证明 Bianchi 恒等式(3.2.136)，我们注意到 $\nabla_{\alpha}W_{\beta}$ 是(0,2)型张量，因为根据算子 ∇_{α} 的定义，它是从张量空间 $T(k,l)$ 到张量空间 $U(k,l+1)$ 的映射。于是，将对易子$[\nabla_{\mu}, \nabla_{\nu}]$作用于张量 $\nabla_{\alpha}W_{\beta}$，根据方程(3.2.118)得

$$[\nabla_{\mu}, \nabla_{\nu}]\nabla_{\alpha}W_{\beta} = R_{\mu\nu\alpha}{}^{\sigma}\nabla_{\sigma}W_{\beta} + R_{\mu\nu\beta}{}^{\sigma}\nabla_{\alpha}W_{\sigma} \tag{3.2.137}$$

同时，我们有(根据方程(3.2.115))

$$\nabla_{\mu}[\nabla_{\nu}, \nabla_{\alpha}]W_{\beta} = \nabla_{\mu}(R_{\nu\alpha\beta}{}^{\sigma}W_{\sigma}) = W_{\sigma}\nabla_{\mu}R_{\nu\alpha\beta}{}^{\sigma} + R_{\nu\alpha\beta}{}^{\sigma}\nabla_{\mu}W_{\sigma} \tag{3.2.138}$$

由方程(3.2.137)和方程(3.2.138)分别得到(对下标 μ,ν,α 取完全反对称运算)

$$[\nabla_{[\mu}, \nabla_{\nu]}\nabla_{\alpha]}W_{\beta} = R_{[\mu\nu\alpha]}{}^{\sigma}\nabla_{\sigma}W_{\beta} + R_{[\mu\nu|\beta|}{}^{\sigma}\nabla_{\alpha]}W_{\sigma} \tag{3.2.139}$$

$$\nabla_{[\mu}[\nabla_{\nu}, \nabla_{\alpha]}]W_{\beta} = W_{\sigma}\nabla_{[\mu}R_{\nu\alpha]\beta}{}^{\sigma} + R_{[\nu\alpha|\beta|]}{}^{\sigma}\nabla_{\mu]}W_{\sigma} \tag{3.2.140}$$

其中包含在两竖线| |之间的指标不参加反对称运算,反对称运算只对指标 μ,ν,α 进行。不难验证(只要将其展开)

$$[\nabla_{[\mu}, \nabla_{\nu}]\nabla_{\alpha]}W_{\beta} = \nabla_{[\mu}[\nabla_{\nu}, \nabla_{\alpha]}]W_{\beta} \tag{3.2.141}$$

因此,我们有

$$R_{[\mu\nu\alpha]}{}^{\sigma}\nabla_{\sigma}W_{\beta} + R_{[\mu\nu|\beta|}{}^{\sigma}\nabla_{\alpha]}W_{\sigma} = W_{\sigma}\nabla_{[\mu}R_{\nu\alpha]\beta}{}^{\sigma} + R_{[\mu\nu|\beta|}{}^{\sigma}\nabla_{\mu]}W_{\sigma} \tag{3.2.142}$$

根据反对称运算的定义,下述关系是恒等式

$$R_{[\mu\nu|\beta|}{}^{\sigma}\nabla_{\alpha]} \equiv R_{[\nu\alpha|\beta|}{}^{\sigma}\nabla_{\mu]} \tag{3.2.143}$$

上式可通过展开直接验证。又根据黎曼曲率的性质(c)(即方程(3. 2. 123)), $R_{[\mu\nu\alpha]}{}^{\sigma}=0$。因此,方程(3. 2. 142)变为

$$W_{\sigma}\nabla_{[\mu}R_{\nu\alpha]\beta}{}^{\sigma} = 0 \tag{3.2.144}$$

由于 W_{σ} 任意,因此,方程(3. 2. 136)成立。

由于性质(a)和(b),对黎曼曲率的前两个指标或后两个指标缩并均给出零曲率。对第一和第三指标缩并,或对第二和第四指标缩并,则给出一新的曲率,称为 Ricci 曲率

$$R_{\mu\alpha} = R_{\mu\nu\alpha}{}^{\nu} \tag{3.2.145}$$

这里需注意由黎曼曲率获得 Ricci 曲率时指标缩并的位置(两个缩并指标是相间的)。Ricci 曲率是对称的,此因

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = R_{\alpha\beta\mu\nu} \tag{3.2.146}$$

由此

$$\begin{aligned} R_{\mu\alpha} &= g^{\sigma\beta}R_{\mu\nu\alpha\beta}\,|_{\sigma=\nu} = R_{\mu\nu\alpha}{}^{\nu} \\ R_{\alpha\mu} &= g^{\sigma\beta}R_{\alpha\beta\mu\nu}\,|_{\sigma=\nu} = R_{\alpha}{}^{\nu}{}_{\mu\nu} \\ R_{\mu\alpha} &= R_{\alpha\mu} \end{aligned} \tag{3.2.147}$$

为证明方程(3. 2. 146),只要应用性质(a)、(b)和(c)即可。

再一次缩并 Ricci 曲率 $R_{\mu\nu}$,则得到标量曲率

$$R = g^{\sigma\nu}R_{\mu\nu}\,|_{\sigma=\mu} = R_{\mu}{}^{\mu} \tag{3.2.148}$$

缩并 Bianchi 恒等式(3. 2. 136),得

$$\nabla_{[\mu}R_{\nu\alpha]\beta}{}^{\mu} = 0 \tag{3.2.149}$$

即

$$\nabla_\mu R_{\nu\alpha\beta}{}^\mu + \nabla_\nu R_{\alpha\mu\beta}{}^\mu + \nabla_\alpha R_{\mu\nu\beta}{}^\mu - \nabla_\nu R_{\mu\alpha\beta}{}^\mu - \nabla_\alpha R_{\nu\mu\beta}{}^\mu - \nabla_\mu R_{\alpha\nu\beta}{}^\mu = 0 \tag{3.2.150}$$

其中用到了 $\nabla_\alpha R_{\mu\nu\beta}{}^\mu = -\nabla_\alpha R_{\nu\mu\beta}{}^\mu = -\nabla_\alpha R_{\nu\beta}$。对方程(3.2.150)提升指标 β,然后与 ν 缩并,则有

$$\nabla_\mu R_\alpha{}^\mu + \nabla_\nu R_\alpha{}^\nu - \nabla_\alpha R = 0 \tag{3.2.151}$$

即

$$\nabla_\mu R_\alpha{}^\mu - \frac{1}{2}\nabla_\alpha R = 0 \tag{3.2.152}$$

或写成

$$\nabla_\mu G^{\nu\mu} = 0 \tag{3.2.153}$$

其中

$$G^{\nu\mu} = R^{\nu\mu} - \frac{1}{2}g^{\nu\mu}R \tag{3.2.154}$$

称为爱因斯坦曲率张量。需要强调指出的是,只要一引进度规张量 $g_{\mu\nu}$,算子 ∇_α 就是自然算子,即满足条件 $\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0$。

对自然算子 ∇_μ,若令 $\tilde{\nabla}_\mu = \partial_\mu (\equiv \partial/\partial x^\mu)$,则 Christoffel 符号 $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$ 由方程(3.2.102)给出。相应地,由方程(3.2.115)确定的黎曼曲率称为黎曼 Christoffel 曲率,或黎曼 Christoffel 曲率张量,简称黎曼张量,其张量性在后面证明。

黎曼张量 $R_{\mu\nu\alpha}{}^\beta$ 与 Christoffel 符号 $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$ 之间的关系可根据方程(3.2.115)和方程(3.2.82)(其中令 $\tilde{\nabla}_\mu = \partial_\mu, C_{\mu\nu}{}^\lambda = \Gamma_{\mu\nu}{}^\lambda$)得到

$$\begin{aligned}
R_{\mu\nu\alpha}{}^\beta W_\beta &= [\nabla_\mu, \nabla_\nu] W_\alpha = \nabla_\mu(\nabla_\nu W_\alpha) - \nabla_\nu(\nabla_\mu W_\alpha) \\
&= \partial_\mu(\nabla_\nu W_\alpha) - \Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}\nabla_\sigma W_\alpha - \Gamma^\sigma{}_{\mu\alpha}\nabla_\nu W_\sigma - [\partial_\nu(\nabla_\mu W_\alpha) \\
&\quad - \Gamma^\alpha{}_{\nu\mu}\nabla_\sigma W_\alpha - \Gamma^\sigma{}_{\nu\alpha}\nabla_\mu W_\sigma] \\
&= \partial_\mu(\partial_\nu W_\alpha - \Gamma^\sigma{}_{\nu\alpha}W_\alpha) - \Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}(\partial_\nu W_\sigma - \Gamma^\lambda{}_{\nu\sigma}W_\lambda) \\
&\quad - \partial_\nu(\partial_\mu W_\alpha - \Gamma^\sigma{}_{\mu\alpha}W_\sigma) + \Gamma^\sigma{}_{\nu\alpha}(\partial_\mu W_\sigma - \Gamma^\lambda{}_{\nu\sigma}W_\lambda) \\
&= -\partial_\mu\Gamma^\sigma{}_{\nu\alpha}W_\sigma - \Gamma^\sigma{}_{\nu\alpha}\partial_\mu W_\sigma - \Gamma^\sigma{}_{\mu\alpha}\partial_\nu W_\sigma + \Gamma^\sigma{}_{\mu\alpha}\Gamma^\lambda{}_{\nu\sigma}W_\lambda \\
&\quad + \partial_\nu\Gamma^\sigma{}_{\nu\alpha}W_\sigma + \Gamma^\sigma{}_{\mu\alpha}\partial_\nu W_\sigma + \Gamma^\sigma{}_{\nu\alpha}\partial_\mu W_\sigma - \Gamma^\sigma{}_{\nu\alpha}\Gamma^\lambda{}_{\mu\sigma}\partial_\mu W_\lambda
\end{aligned}$$

$$= \left(\frac{\partial \Gamma^{\sigma}{}_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial \Gamma^{\sigma}{}_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu}} \right) W_{\sigma} + (\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\alpha}\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\sigma}\Gamma^{\sigma}{}_{\nu\alpha}\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\sigma}) W_{\lambda}$$

$$= \left(\frac{\partial \Gamma^{\beta}{}_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial \Gamma^{\beta}{}_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu}} + \Gamma^{\sigma}{}_{\mu\alpha}\Gamma^{\beta}{}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\sigma}{}_{\nu\alpha}\Gamma^{\beta}{}_{\mu\sigma} \right) W_{\beta} \quad (3.2.155)$$

最后有

$$R_{\mu\nu\alpha}{}^{\beta} = \frac{\partial \Gamma^{\beta}{}_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial \Gamma^{\beta}{}_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu}} + \Gamma^{\sigma}{}_{\mu\alpha}\Gamma^{\beta}{}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\sigma}{}_{\nu\alpha}\Gamma^{\beta}{}_{\mu\sigma} \quad (3.2.156)$$

方程(3.2.156)具有重要意义。我们曾经在3.1.3节指出，$\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}$具有引力特性(但并不代表引力的本质属性，见后，同时参见第4章；Shen，1996)。一般地，当引力场不存在时，$\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}$为零；存在引力场时，$\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}$不为零。于是，黎曼张量 $R_{\mu\nu\alpha}{}^{\beta}$ 与引力场联系了起来。

当不存在引力场时，$R_{\mu\nu\alpha}{}^{\beta}=0$；当存在引力场时，$R_{\mu\nu\alpha}{}^{\beta}$ 不为零，即使在一个局部惯性系中，它也不为零。如若不然，在局部惯性系 ξ^{α} 中

$$R_{\mu\nu\alpha}{}^{\beta} = 0 \quad (3.2.157)$$

则由于上式是张量方程，因而在任意坐标系 x^{μ} 中上式都成立，但这就意味着不存在引力场，或者是平直空间。这是矛盾的。这也是张量的极重要的性质。$\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}$不是张量，因而它可以为零，比如在局部惯性系中就为零，因为在局部惯性系中不存在引力场。在局部惯性系中 $R_{\mu\nu\alpha}{}^{\beta}\neq 0$ 说明，黎曼张量刻画了空间的内禀性质。虽然局部惯性系好像屏蔽了引力场，但空间结构没有变化。引力场决定了弯曲空间。

下面要证明前面提到的黎曼曲率(即黎曼-Christoffel曲率)$R_{\mu\nu\alpha}{}^{\beta}$ 的确是一张量。假定坐标系由 x^{μ} 变为 x'^{μ}，我们要考察 $R_{\mu\nu\alpha}{}^{\beta}$ 是否满足张量变换律。根据3.2.7节的讨论，在 $x^{\mu}\to x'^{\mu}$ 变换之下，仿射联络的变换规律由方程(3.2.106)给出

$$\Gamma'^{\lambda}{}_{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}} \Gamma^{\alpha}{}_{\sigma\beta} + \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}\partial x'^{\nu}} \quad (3.2.158)$$

根据方程(3.2.156)，得

$$R'_{\mu\nu\alpha}{}^{\beta} = \frac{\partial \Gamma'^{\beta}_{\mu\alpha}}{\partial x'^{\nu}} - \frac{\partial \Gamma'^{\beta}_{\nu\alpha}}{\partial x'^{\mu}} + \Gamma'^{\sigma}_{\mu\alpha}\Gamma'^{\beta}_{\nu\sigma} - \Gamma'^{\sigma}_{\nu\alpha}\Gamma'^{\beta}_{\mu\sigma} \tag{3.2.159}$$

将方程(3.2.158)代入上式,经过较烦琐的运算得到

$$\begin{aligned} R'_{\mu\nu\alpha}{}^{\beta} &= \frac{\partial x^{\xi}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\eta}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\lambda}} \left(\frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\xi\kappa}}{\partial x^{\eta}} - \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\eta\kappa}}{\partial x^{\xi}} + \Gamma^{\varepsilon}_{\xi\kappa}\Gamma^{\lambda}_{\eta\varepsilon} - \Gamma^{\varepsilon}_{\eta\kappa}\Gamma^{\lambda}_{\xi\varepsilon} \right) \\ &= \frac{\partial x^{\xi}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\eta}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\lambda}} R_{\xi\eta\kappa}{}^{\lambda} \end{aligned} \tag{3.2.160}$$

可见, $R_{\mu\nu\alpha}{}^{\beta}$ 的确是张量,因此, $R_{\mu\nu\alpha}{}^{\beta}$ 称为黎曼张量或黎曼-Christoffel 曲率张量。

方程(3.2.156)和方程(3.2.158)同时给出了计算 $R_{\mu\nu\alpha}{}^{\beta}$ 的方法,只要度规 $g_{\mu\nu}$是事先给定的。当然,如果有办法通过测量手段得到 $\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}$,则可直接由方程(3.2.156)计算出 $R_{\mu\nu\alpha}{}^{\beta}$。

3.2.9 测地线与测地线偏离方程

在一般流形空间 $\boldsymbol{M}$ 中,测地线是"尽可能直"的曲线。如果给流形 $\boldsymbol{M}$ 赋予闵可夫斯基度规(从而成为闵可夫斯基空间),那么,测地线就是直线。从物理学观点来看,在空间 $\boldsymbol{M}$ 中自由运动粒子的轨迹就是测地线。在无引力空间,空间是平直的,自由运动粒子的轨迹(即测地线)是一空时直线

$$\frac{\mathrm{d}^2 \xi^{\alpha}}{\mathrm{d}\tau^2} = 0 \tag{3.2.161}$$

在存在引力场的空间,按照等效原理,存在局部惯性系 ξ^{α},在这个坐标系中,粒子的运动方程仍然由方程(3.2.161)给出。但在一般坐标系 x^{α} 中,自由粒子的运动轨迹为

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^{\alpha}}{\mathrm{d}\tau^2} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} \frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}\tau} \frac{\mathrm{d}x^{\nu}}{\mathrm{d}\tau} = 0 \tag{3.2.162}$$

其推导过程已在 3.1.3 节给出。由方程(3.2.162)决定的轨迹就是测地线。因此,一个自由粒子总是沿测地线运动。

从微分几何流形的观点来看,测地线是这样一条曲线,该曲线上的切矢量总是在做平行移动。简单地说,测地线上的切矢量沿测地

线自身做平行移动。根据平行移动的定义(见 3.2.6 节),对于任意一个矢量 V^α,它沿一般曲线 C 的平行移动方程为(即方程(3.2.84))

$$T^\mu \nabla_\mu V^\alpha = 0 \tag{3.2.163}$$

其中 T^μ 是曲线 C 上的切矢量。对于测地线 C 来说,上述方程也成立。

将 V^α 用测地线上的切矢量 T^α 来替换,则有

$$T^\mu \nabla_\mu T^\alpha = 0 \tag{3.2.164}$$

取 ∇_μ 为协变导数算子 D_μ(即给定了度规 $g_{\mu\nu}$,并且取 $\nabla_\mu \equiv \partial\mu$)

$$D_\mu T^\alpha = \partial_\mu T^\alpha + \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} T^\nu \tag{3.2.165}$$

于是,测地线(3.2.164)可写成

$$T^\mu \partial_\mu T^\alpha + \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} T^\mu T^\nu = 0 \tag{3.2.166}$$

由于切矢量 T^μ 可表示成(见方程(3.2.29))

$$T^\mu = \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t} \tag{3.2.167}$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}t}\right) + \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{3.2.168}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^\alpha}{\mathrm{d}t^2} + \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{3.2.169}$$

其中,t 是测地线(曲线)参数,也可以换成原时 τ。

基于以上所述,按几何流形观点得到的测地线方程(3.2.169)与按等效原理得到的测地线方程(3.2.162)是一致的。但必须强调指出,按流形观点,测地线概念具有更广泛的内容。因为测地线的普遍方程是(3.2.164),导数算子 ∇_μ 不必取为协变导数算子 D_μ。只有当 ∇_μ 取为 D_μ 时,按流形观点得到的测地线才与按物理学观点得到的测地线一致。举一个简单的例子便能说明问题。在物质实体区域中,按物理学观点定义的测地线概念就失效了。但按流形观点,测地线概念仍然有效,因为物质实体区域也可以被看做是一种流形(空间)。

在一般流形空间中，两条最初平行的测地线会逐渐分离或接近。确切地说，欧几里得第五公设不再保持有效。

假定用 $C_s(t)$ 表示测地线簇，t 是任意实参数，参数 s 则反映了"线簇"。对于选定的 $s \in \mathbf{R}$，$C_s(t)$ 是一条确定的测地线；当 s 变化时，测地线 C_s 随 s 变化（参见图 3.2.5）。因此，对于曲线簇 $C_s(t)$，除了可以建立沿 t 方向的切矢量 T^μ 的概念之外，还可以建立沿 s 方向的分离矢量的概念。这里需要指出，切矢量是对指定的一条曲线（测地线）而言的，而分离矢量则是曲线（测地线）与曲线之间的（横向）矢量，这时，t 是固定的（参见图 3.2.5）。切矢量 T^μ 以 t 为变量参数，可表示成

$$T^\mu = \frac{\partial x^\mu(t,s)}{\partial t} \tag{3.2.170}$$

坐标 $x^\mu(t,s)$ 是二元参数 (t,s) 的函数。在 3.2.3 节我们曾给出了曲线 C 上的切矢量

$$T^\alpha = \frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}t} \tag{3.2.171}$$

因为在那里，曲线坐标 $x^\alpha(t)$ 是单参数的。现在由于曲线坐标 $x^\mu(t,s)$ 是两参数的，因此切矢量表达式采用式(3.2.170)。类似地，用 X^α 表示分离矢量（参见图 3.2.5），则有

$$X^\alpha = \frac{\partial x^\alpha(t,s)}{\partial s} \tag{3.2.172}$$

两个相邻测地线在沿切矢量 T^μ 方向行进时的分离速度可表示成(Wald, 1984)

$$u^\mu = T^\alpha \nabla_\alpha X^\mu \tag{3.2.173}$$

一般地，可将 u^μ 视为两条相邻测地线的相对分离速度。类似地，

$$a^\mu = T^\lambda \nabla_\lambda u^\mu = T^\lambda \nabla_\lambda (T^\alpha \nabla_\alpha X^\mu) \tag{3.2.174}$$

可解释成相邻测地线的相对分离加速度。下面我们建立 a^μ 与黎曼曲率张量 $R_{\mu\nu\alpha}{}^\beta$ 之间的关系，假定 ∇_μ 为协变导数算子。

由于 T^μ 是测地线上的切矢量，因而必定满足测地线平行移动方程，即

$$T^\mu \nabla_\mu T^\alpha = 0 \tag{3.2.175}$$

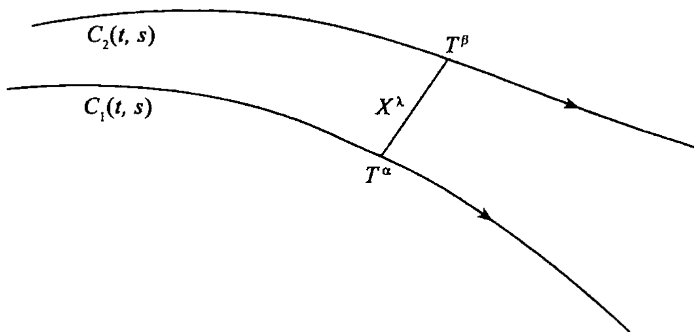


图 3.2.5 C_1 和 C_2 是两条测地线，T^α 和 T^β 分别是 C_1 和 C_2 上的切矢量，X^λ 是 C_1 与 C_2 之间的分离矢量；对于统一的时间参数 t，测地线之间的差异由参数 s 决定

同时，我们可建立如下的关系

$$T^\mu\nabla_\mu X^\alpha = X^\mu\nabla_\mu T^\alpha \tag{3.2.176}$$

因为

$$\begin{aligned}T^\mu\nabla_\mu X^\alpha &= T^\mu(\partial_\mu X^\alpha + \Gamma^\alpha{}_{\mu\lambda}X^\lambda) = \frac{\partial x^\mu}{\partial t}\frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\mu} + \frac{\partial x^\mu}{\partial t}\Gamma^\alpha{}_{\mu\lambda}X^\lambda \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial s}\right) + \Gamma^\alpha{}_{\mu\lambda}\frac{\partial x^\mu}{\partial t}\frac{\partial x^\lambda}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial t}\right) + \Gamma^\alpha{}_{\lambda\mu}\frac{\partial x^\lambda}{\partial t}\frac{\partial x^\mu}{\partial s} \\ &= \frac{\partial x^\mu}{\partial s}\frac{\partial}{\partial x^\mu}(T^\alpha) + X^\mu\Gamma^\alpha{}_{\lambda\mu}X^\lambda = X^\mu\nabla_\mu X^\alpha\end{aligned} \tag{3.2.177}$$

在上面的推演中用到了协变导数算子的定义（见 3.2.6 节）以及方程（3.2.170）和方程（3.2.172）。有了方程（3.2.175）和方程（3.2.176），便可由方程（3.2.174）推出

$$\begin{aligned}a^\mu &= T^\lambda\nabla_\lambda u^\mu = T^\lambda\nabla_\lambda(T^\alpha\nabla_\alpha X^\mu) \\ &= T^\lambda\nabla_\lambda(X^\alpha\nabla_\alpha T^\mu) \\ &= T^\lambda\nabla_\lambda X^\alpha\nabla_\alpha T^\mu + T^\lambda X^\alpha\ \nabla_\lambda\nabla_\alpha T^\mu \\ &= X^\lambda\nabla_\lambda T^\alpha\nabla_\alpha T^\mu + T^\lambda X^\alpha\nabla_\alpha\nabla_\lambda T^\mu + T^\lambda X^\alpha[\nabla_\lambda, \nabla_\alpha]T^\mu \\ &= X^\lambda\nabla_\lambda T^\alpha\nabla_\alpha T^\mu + X^\lambda T^\alpha\nabla_\lambda\nabla_\alpha T^\mu + T^\lambda X^\alpha[\nabla_\lambda, \nabla_\alpha]T^\mu\end{aligned}$$

$$= X^\lambda \nabla_\lambda (T^\alpha \nabla_\alpha T^\mu) + T^\lambda X^\alpha [\nabla_\lambda, \nabla_\alpha] T^\mu$$

$$= T^\lambda X^\alpha [\nabla_\lambda, \nabla_\alpha] T^\mu \qquad (3.2.178)$$

再将方程(3.2.117)代入上式,得

$$a^\mu = - T^\lambda X^\alpha R_{\lambda\alpha\sigma}{}^\mu T^\sigma = - R_{\lambda\alpha\sigma}{}^\mu T^\lambda X^\alpha T^\sigma \qquad (3.2.179)$$

这个方程就是测地线偏离方程。当 $R_{\lambda\alpha\sigma}{}^\mu = 0$ 时, $a^\mu = 0$;当 $R_{\lambda\alpha\sigma}{}^\mu \neq 0$ 时, $a^\mu \neq 0$。因此,在弯曲空间中,最初平行的两条测地线将逐渐远离或接近(参见图3.2.5)。联系到引力场空间,存在引力时,两个最初平行运动的自由粒子将逐渐相互远离或接近。根据这一条性质,在一般引力场中,真正的惯性系不可能存在,除非把参考系限定在一点。但在一点,参考系没有意义。正是由于这一性质,我们有可能在自由降落的局部参考系中探测到引力效应,实现引力与惯性力的分离(Shen,1996)。Synge(1960)、Moritz(1967,1985)以及 Shen(1996)等曾经讨论过这一问题。

在3.2.8节末尾我们指出,给定了度规 $g_{\mu\nu}$,可以确定黎曼张量 $R_{\mu\nu\alpha}{}^\beta$。但只有在某些特殊的情形(比如考虑均质圆球产生的引力场),$g_{\mu\nu}$才可以直接给出。一般情况下,$g_{\mu\nu}$很难求定。方程(3.2.179)则给出了一种通过实际测量确定 $R_{\mu\nu\alpha}{}^\beta$ 的方法,详见有关文献(Shen,1996)以及本书第4章。

考察两个相邻的自由降落的粒子。选定一个坐标系 x^μ 之后,只要测定了任意一个粒子沿测地线的切矢 T^μ($T^\mu = \partial x^\mu / \partial t$ 实际上是四维速度矢量,其中 $T^0 = 1, T^i = v^i$),测定了两个粒子之间的分离矢量 X^μ($X^\mu = \partial x^\mu / \partial s$)以及两粒子之间的相对加速度 a^μ,就可根据测地线偏离方程确定出黎曼曲率张量。

3.3 引力效应

在无引力区域,流形空间是闵可夫斯基四维空时,赋予了闵可夫斯基度规 $\eta_{\mu\nu}$,这时,狭义相对论有效。在3.1.3节,我们曾经应用等效原理建立了自由运动粒子的运动方程。基本思想是先写下在局部惯性系 ξ^α 中满足的方程形式,然后通过洛伦兹变换转换到一般参

考系 x^α 之中。下面我们要考察更广义的变换,这种变换不必是洛伦兹变换,甚至可以是非线性的,只要雅可比行列式 $|\partial x^\mu/\partial x'^\nu|$ 不为零即可。

3.3.1 对应原理

按照爱因斯坦(1916)的观点,任何物理学规律所满足的方程应该是协变的。这就是广义协变原理。然而,广义协变原理本身并没有提供新的物理内容。从数学观点来看,任何一个方程都可以被做成是广义协变的(Kretschmann,1917;Weinberg,1972)。我们所感兴趣的是具有物理内容的方程的变换规律。为此,只要能写出一个协变方程,它在某种特殊的参考系(比如局部惯性系)中成立,那么,根据广义协变原理,这个方程描述同样一个物理学规律。但问题往往是反过来的。我们首先知道了某个物理学规律在某种特殊参考系中的表述形式,如何寻求它在一般参考系中的表述形式呢?从数学角度来看,这一点也不难办到。但如何把引力效应加上去呢?

我们已经知道,不存在引力场时,空时是四维闵可夫斯基空时(流形),或者可以说,有一个四维流形空间,赋予闵可夫斯基度规 $\eta_{\mu\nu}$ 之后,它变成了闵可夫斯基四维空间,这个空间是平直的,因为(见定义式(2.5.3))

$$\eta_{\mu\nu}=\begin{bmatrix}-1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\tag{3.3.1}$$

由此很容易算出仿射联络 $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$ 为零,因为当 $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$ 用 $\eta_{\mu\nu}$ 表示出来之后,它的每一项都含有因子 $\partial\eta_{\mu\nu}/\partial x^\alpha=0$(参见方程(3.2.102))。又因黎曼张量 $R_{\mu\nu\alpha}{}^\beta$ 是 $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$ 以及 $\partial_\alpha\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$ 的组合(参见方程(3.2.156)),因此 $R_{\mu\nu\alpha}{}^\beta=0$。当存在引力时,我们给四维流形空间赋予一般度规 $g_{\mu\nu}$, $g_{\mu\nu}$ 具有引力势特性,于是得到含有引力的四维流形空间,称为黎曼四维空时。闵可夫斯基空时是黎曼空时的特例:$R_{\mu\nu\alpha}{}^\beta=0$。一般情况下,存在引力时, $g_{\mu\nu}$ 是 x^α 的非线性函数,满足 $R_{\mu\nu\alpha}{}^\beta$

$\neq 0$,除非是均匀引力场。这就是说,存在引力时,空间是弯曲的(一般情形)。

基于以上所述,我们可以建立如下对应原理:

> 任何一个物理学规律,只要写出它在闵可夫斯基四维空时中的表述形式,然后用 $g_{\mu\nu}$ 替换 $\eta_{\mu\nu}$,用协变导数算子 D_μ 代替普通导数算子 ∂_μ,就可得到该物理学规律在一般具有引力的空时中的表述形式。

后面我们将阐明如何利用对应原理解决实际应用问题。

3.3.2　质点动力学

一个质点在闵可夫斯基四维空时中的运动方程可写成(见 2.6 节的方程(2.6.1))

$$f^\alpha = m\frac{\mathrm{d}^2 x^\alpha}{\mathrm{d}\tau^2} \tag{3.3.2}$$

其中,f^α是相对论性力,由方程(2.6.4)给出;原时 $\mathrm{d}\tau$ 由下式决定

$$\mathrm{d}\tau^2 = -\eta_{\mu\nu}\mathrm{d}\xi^\mu\mathrm{d}\xi^\nu \tag{3.3.3}$$

其中 ξ^μ 是闵可夫斯基空时中的惯性系坐标。

下面我们要探求存在引力场时,方程(2.6.1)具有什么形式。根据对应原理,只要将方程(2.6.1)中的普通导数算子换成协变导数算子就行了。但这里我们遇到的是对标量参数 τ 取导数,而至今我们尚未讨论相应的协变导数算子。对于普通导数 ∂_μ,对应的协变导数算子为 D_μ,它作用于任一矢量 A^ν 之后得到(参见方程(3.2.83))

$$D_\mu A^\nu = \partial_\mu A^\nu + \Gamma^\nu{}_{\mu\sigma}A^\sigma \tag{3.3.4}$$

令 $\mathrm{d}/\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}_\tau$,对应的协变导数算子记为 D_τ。为明确起见,称 D_τ 为标量参数协变导数算子,以免与协变导数算子 D_μ 混淆(在不致引起混淆的情况下,也将 D_τ 简称为协变导数算子)。现在要问:D_τ 具有什么形式?

为此,考察一矢量 A^μ 在普通导数算子 d_τ 作用下的结果

$$d_\tau A^\mu \equiv \frac{dA^\mu}{d\tau} = \frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} \equiv \frac{dx^\nu}{d\tau}\partial_\nu A^\mu \tag{3.3.5}$$

由于 d_τ 是标量，dx^ν 是矢量，因此 $dx^\nu/d\tau$ 也是矢量，记为

$$B^\nu = d_\tau x^\nu \tag{3.3.6}$$

于是，方程(3.3.5)可写成

$$d_\tau A^\mu = B^\nu \partial_\nu A^\mu \tag{3.3.7}$$

根据对应原理，将方程(3.3.7)中的普通导数算子 d_τ 和偏导数算子 ∂_ν 换成相应的协变导数算子 D_τ 和 D_ν，应该同样有效。故有

$$\begin{aligned} D_\tau A^\mu &= B^\nu D_\nu A^\mu = B^\nu(\partial_\nu A^\mu + \Gamma^\mu{}_{\nu\sigma}A^\sigma) \\ &= \frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} + \Gamma^\mu{}_{\nu\sigma}\frac{dx^\nu}{d\tau}A^\sigma \\ &= \frac{dA^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu{}_{\nu\sigma}\frac{dx^\nu}{d\tau}A^\sigma \end{aligned} \tag{3.3.8}$$

上述方程给出了标量协变导数算子 D_τ 作用于逆变矢量 A^ν 的结果。同理，可以写出 D_τ 作用于协变矢量 U_μ 的结果(这里略去推导)

$$D_\tau U_\mu = \frac{dU_\mu}{d\tau} - \Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}\frac{dx^\nu}{d\tau}U_\sigma \tag{3.3.9}$$

其中用到了 D_μ 作用于协变矢量(即对偶矢量)的结果(基于一般导数算子作用于张量的表述方程(3.2.82)即可得到上述方程，或直接基于方程(3.2.71)，其中令 $\tilde{\nabla}_\mu = \partial_\mu, C^\lambda{}_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$)。这里需要说明，$D_\tau$ 是满足导数算子定义(见 3.2.6 节)的比较特殊的算子。

将方程(2.6.1)改写成

$$f^\alpha = m\frac{d}{d\tau}\left(\frac{dx^\alpha}{d\tau}\right) = m\frac{dB^\alpha}{d\tau} \equiv m d_\tau B^\alpha \tag{3.3.10}$$

其中 B^α 由方程(3.3.6)给出。按照对应原理，上述方程在引力场中的表述形式可写成

$$\begin{aligned} f^\alpha &= mD_\tau B^\alpha = m\left(\frac{dB^\alpha}{d\tau} + \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}B^\nu\right) \\ &= m\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2} + m\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} \end{aligned} \tag{3.3.11}$$

或写成

$$m\frac{\mathrm{d}^2x^\alpha}{\mathrm{d}\tau^2}=f^\alpha-m\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau}\tag{3.3.12}$$

这就是粒子在引力场中的运动方程(其中,f^α是除引力之外的外界作用力,因为引力效应已包含在$\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}$之中了)。对于自由降落的粒子,$f^\alpha=0$,方程(3.3.12)变为

$$\frac{\mathrm{d}^2x^\alpha}{\mathrm{d}\tau^2}+\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau}=0\tag{3.3.13}$$

这正好是粒子在引力场中自由运动的测地线方程。

3.3.3 自旋运动方程

下面我们来考察一个带有自旋的粒子在引力场中的运动规律。粒子的运动轨道仍然由方程(3.3.12)决定。粒子的自旋 S_μ 可以按如下方式求解。

在闵可夫斯基四维空时中的惯性系中,不受外力作用的自由粒子的自旋 S_μ 是恒定的(见2.9节,方程(2.9.22)),即有

$$\mathrm{d}_\tau S_\mu\equiv\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}S_\mu=0\tag{3.3.14}$$

根据对应原理,在存在引力场时,上述方程应该写成

$$D_\tau S_\mu=0\tag{3.3.15}$$

由于 S_μ 是协变矢量,根据方程(3.3.9),上面的方程等效于

$$\frac{\mathrm{d}S_\mu}{\mathrm{d}\tau}-\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau}S_\sigma=0\tag{3.3.16}$$

另外,自旋 S_μ(当不受外力时)在引力场中还满足如下条件

$$S_\mu\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}=0\tag{3.3.17}$$

因为在相对粒子静止的局部惯性系中(粒子位于局部惯性系的原点),$S_\mu=(0,\boldsymbol{S})$,而 $x^\mu=(t,\boldsymbol{0})$,方程(3.3.17)成立。又因 $S_\mu\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}$是标量(零阶张量),因此,上述方程在一般坐标系也成立。

当存在外力作用时,方程(3.3.16)需要修正,但条件(3.3.17)仍然满足。因为不管粒子是否做自由运动,我们总可以选取一个相对粒子静止的参考系,并且使自旋 S_μ 在这个参考系中是恒定的。于

是，方程(3.3.17)在这个参考系中是成立的。根据广义协变原理，在任何其他参考系中 $S_\mu \frac{dx^\mu}{d\tau}$ 所遵循的规律仍然具有方程(3.3.17)的形式。对方程(3.3.17)作用标量协变导数算子 D_τ，得

$$D_\tau(S_\mu V^\mu) = 0 \tag{3.3.18}$$

其中

$$V^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \tag{3.3.19}$$

是四维速度矢量。应用莱布尼兹法则于方程(3.3.18)，得

$$(D_\tau S_\mu)V^\mu + S_\mu D_\tau V^\mu = 0 \tag{3.3.20}$$

由于

$$D_\tau V^\mu = \frac{dV^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu{}_{\nu\sigma}\frac{dx^\nu}{d\tau}V^\sigma = \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu{}_{\nu\sigma}\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\sigma}{d\tau} = \frac{1}{m}f^\mu \tag{3.3.21}$$

其中，最后一个等式用到了方程(3.3.12)，因此，方程(3.3.20)可写成

$$(D_\tau S_\mu)V^\mu = -\frac{1}{m}f^\mu S_\mu \tag{3.3.22}$$

由于逆变速度矢量 V^μ 与协变速度矢量 V_μ 在惯性参考系中由如下变换

$$V_\mu = \eta_{\mu\lambda}V^\lambda \tag{3.3.23}$$

联系，因此

$$\begin{aligned} V_\mu V^\mu &= \eta_{\mu\lambda}V^\lambda V^\mu = -(V^0)^2 + (V^1)^2 + (V^2)^2 + (V^3)^2 \\ &= -\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dx^1}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dx^2}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dx^3}{d\tau}\right)^2 \\ &= -\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2(1 - v^2) \end{aligned} \tag{3.3.24}$$

其中 $v^2 = (dx^1/dt)^2 + (dx^2/dt)^2 + (dx^3/dt)^2$ 是普通速度（平方）。又因

$$d\tau^2 = -\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = dt^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 \tag{3.3.25}$$

或写成

$$\left(\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t}\right)^2 = 1 - v^2 \tag{3.3.26}$$

因此

$$V_\mu V^\mu = -1 \tag{3.3.27}$$

上述标量方程在任何参考系中都成立。利用方程(3.3.27),方程(3.3.22)可改写成

$$(D_\tau S_\mu)V^\mu = V_\mu V^\mu\left(\frac{1}{m}S_\sigma f^\sigma\right) = \left(\frac{1}{m}S_\sigma f^\sigma V_\mu\right)V^\mu \tag{3.3.28}$$

由于 V^μ 是任意矢量,因此

$$D_\tau S_\mu = \left(\frac{1}{m}S_\sigma f^\sigma\right)V_\mu \tag{3.3.29}$$

同时提升指标 μ,有

$$D_\tau S^\mu = \left(\frac{1}{m}S_\sigma f^\sigma\right)V^\mu \tag{3.3.30}$$

自旋在引力场中满足一定的运动规律,称为自旋的进动。在讨论地球自转轴的进动效应以及惯性陀螺的进动效应时要用到方程(3.3.30)。当然,对于不受外力作用的自由运动的陀螺,$f^\sigma=0$,回到了方程(3.3.16)。

3.3.4　能量动量张量

在 2.8 节,我们曾经定义了粒子系统的能量动量张量

$$\begin{aligned} T^{\alpha\beta} &= \sum_n m_n \int \frac{\mathrm{d}x_n^\alpha}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}x_n^\beta \delta^4(x - x_n) \\ &= \sum_n \int p_n^\alpha(\tau)\frac{\mathrm{d}x_n^\beta(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\delta^4(x - x_n(\tau))\mathrm{d}\tau \end{aligned} \tag{3.3.31}$$

满足如下守恒律

$$\partial_\beta T^{\alpha\beta} = G^\alpha \tag{3.3.32}$$

其中,力密度 G^α 由下式确定

$$G^\alpha = \sum_n \frac{\mathrm{d}p_n^\alpha(t)}{\mathrm{d}t}\delta^3(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_n(t)) \tag{3.3.33}$$

方程(3.3.32)在无引力存在时成立,因此,根据对应原理,当存在引

力时,我们有

$$D_\beta T^{\alpha\beta} = G^\alpha \tag{3.3.34}$$

将上式左边明确写出(利用方程(3.2.82),并将 $\tilde{\nabla}_\mu$ 换成 ∂_μ, $C^\lambda{}_{\mu\nu}$换成 $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$)

$$D_\mu T^{\alpha\beta} = \partial_\mu T^{\alpha\beta} + \Gamma^\alpha{}_{\mu\lambda} T^{\lambda\beta} + \Gamma^\beta{}_{\mu\lambda} T^{\alpha\lambda} \tag{3.3.35}$$

再缩并指标 μ 和 β,得

$$D_\beta T^{\alpha\beta} = \partial_\beta T^{\alpha\beta} + \Gamma^\alpha{}_{\beta\lambda} T^{\lambda\beta} + \Gamma^\beta{}_{\beta\lambda} T^{\alpha\lambda} \tag{3.3.36}$$

将上式代入方程(3.3.34),有

$$\partial_\beta T^{\alpha\beta} = G^\alpha - \Gamma^\alpha{}_{\beta\lambda} T^{\lambda\beta} - \Gamma^\beta{}_{\beta\lambda} T^{\alpha\lambda} \tag{3.3.37}$$

方程(3.3.37)是关于能量动量张量的一阶偏微分方程,因此,在给定力密度的前提下,能量动量张量可通过仿射联络确定;反之亦然。

存在引力时, $T^{\alpha\beta}$由下式定义

$$\begin{aligned} T^{\alpha\beta} &= g^{-1/2} \sum_n p_n^\alpha(t) \frac{\mathrm{d}x_n^\beta(t)}{\mathrm{d}\tau_n} \delta^3(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_n) \\ &= g^{-1/2} \sum_n m_n \frac{\mathrm{d}x_n^\alpha}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}x_n^\beta}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau_n} \delta^3(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_n) \end{aligned} \tag{3.3.38}$$

其中, g 是 $g_{\mu\nu}$的行列式的负值, $\mathrm{d}\tau_n$ 是第 n 个粒子的原时。这个表达式在不存在引力时变为方程(3.3.31),因为这时 $g = -|g_{\mu\nu}| = -|\eta_{\mu\nu}| = -(-1) = 1$。存在引力时的力密度函数 G^α 由方程(3.3.37)确定;当不存在引力时, G^α 由方程(3.3.33)给出。

3.3.5 引力、惯性力以及马赫原理

任何物体之间都具有引力相互作用。至于说引力究竟起源于什么,至今仍然是一个谜。我们只能说,只要存在物质,就存在引力;物质是产生引力的源。但这并不能从本质上说明引力是如何产生的。

惯性力的起源也是一个谜。当一个物体做加速运动时,它"感受"到一个与加速方向相反的力,这个力通常称为惯性力。牛顿认为,惯性力起源于一个物体相对绝对空间的加速运动,而不是相对于某个参考系的加速运动。为了证实这一论点,牛顿做了一个水桶旋转实验(Newton,1687)。他用一根细绳将盛了水的桶悬挂起来,然后

使水桶旋转。牛顿发现:开始的时候水桶转水不转,即水与桶之间有相对运动;但这时,水面仍然是平的,与水桶未转动前的情形完全一样;后来,水被桶带动一起转,尽管这时水与桶之间没有相对运动,但水面却不再保持平状,而是中间向下凹、四周向上凸起之状;即令桶突然停止转动,但水仍然在转,这时的水仍然具有凹形。根据这一实验,牛顿得出结论,当一个物体相对绝对空间作加速运动时,它受到一惯性力作用。因此,牛顿认为,惯性力起源于物体相对于绝对空间的加速运动。

然而,马赫认为(Mach,1893),惯性力并非起源于物体相对于绝对空间的加速运动,而是起源于相对遥远星系的加速运动,或者说,相对于宇宙总物质的相对加速运动。马赫指出(Mach,1893,1908):"如果将牛顿水桶旋转实验中的桶壁加厚,一直使其延伸到几十公里,结果会怎样呢? 这时,桶壁与水之间的相对运动将不可忽视,实验结果将有可能与牛顿的实验结果不同。"由此,马赫得出结论:惯性力起源于物体相对于宇宙总物质的相对加速运动。这就是著名的马赫原理。

爱因斯坦自认为是马赫的追随者。他在写给马赫的一封信以及悼念马赫的一篇文章(参见爱因斯坦文集第一卷 pp. 74,83)中高度评价了马赫原理,并且认为马赫是广义相对论的先驱。不过,马赫并不这样认为,因为他本人并不完全赞同爱因斯坦。

现在让我们考察一下,在一个假定不存在物质的宇宙(尽管这种假定根本不能成立)中会发生什么现象。按照马赫原理,这时不存在惯性力。但按照牛顿的观点,惯性力依然存在。实际上,只要我们一引进加速参考系,就引进了惯性力;一引进旋转参考系,就引进了惯性离心力、科里奥利(Coriolis)力以及欧拉(Euler)力。这表明,惯性力与宇宙总物质没有关系。

再考察爱因斯坦的自由降落升降机。在升降机中,观测者感受不到引力,这是因为引力与惯性力正好抵消了。一个物体在宇宙总引力 $\boldsymbol{F}$ 的作用下做自由下落运动,同时该物体"感受"到一个反向惯性力 $\boldsymbol{f}$。由于这两个力大小相等方向相反,因此,该物体所受"合力"为零。我们可以认为惯性力 $\boldsymbol{f}$ 起源于宇宙总物质,因为引力 $\boldsymbol{F}$ 是由

宇宙总物质产生的。但如果我们进一步推想，在 $\boldsymbol{F}$ 的基础上再额外加上一个力 $\Delta\boldsymbol{F}$（$\Delta\boldsymbol{F}$ 不是引力），使得作用于该物体的力为 $\boldsymbol{F}+\Delta\boldsymbol{F}$。当然，这时物体不再作自由落体运动，而是在力 $\boldsymbol{F}+\Delta\boldsymbol{F}$ 的作用下运动。同样，这时的物体不仅感受到 $\boldsymbol{F}+\Delta\boldsymbol{F}$ 的作用，还"感受"到一个大小与 $\boldsymbol{F}+\Delta\boldsymbol{F}$ 相等、方向相反的惯性力 $\boldsymbol{f}$ 的作用，即有 $\boldsymbol{f}=-\boldsymbol{F}-\Delta\boldsymbol{F}$。这一次，我们是否仍然有理由认为 $\boldsymbol{f}$ 起源于宇宙总物质呢？为了看清楚这一点，我们假定 $\boldsymbol{F}$ 逐渐减小以致最后消失，这时，物体受到的力只有 $\Delta\boldsymbol{F}$，惯性力为 $\boldsymbol{f}=-\Delta\boldsymbol{F}$。我们没有任何理由认为 $\boldsymbol{f}$ 起源于宇宙总物质，倒是可以把它归于物体相对于"绝对空间"的加速运动。只要我们承认惯性定律（即一切物体在不受外力（包括引力）作用时始终处于静止状态或匀速运动状态），上述论断就具有可靠的基础。

当然，由于我们不可能假定一个不存在物质的宇宙，因此，究竟是牛顿正确还是马赫正确，还不能最终作出判决（目前，大多数物理学家倾向于马赫）；但这无关紧要，因为惯性起源问题并不构成广义相对论的基础。科学在不断逼近真理，物理学定律是在某个层次上的自然法则。无论是牛顿引力理论还是爱因斯坦引力理论，它们均不能构成对自然的终极描述，因为它们都没有解释引力的本质（起源）。

3.4 爱因斯坦场方程

爱因斯坦花费了近十年的时间（1907—1916），最终于 1915 年找到了目前公认的引力场方程。要详细讨论场方程是如何建立的，那将是非常困难的事。为此，我们将推导过程简化。

我们知道，质量是引力的源。能量动量张量 $T_{\mu\nu}$ 与质量有关。假定 ρ 是物质的质量密度，那么，对于一个以四维速度 V^{μ} 运动的观测者来说，ρ 可表示成（Misner et al.，1973）

$$\rho = T_{\mu\nu}V^{\mu}V^{\nu} \tag{3.4.1}$$

上式表明，能量动量张量的作用类似于一个引力源。当观测者相对源静止时，有

$$\rho = T_{00} \tag{3.4.2}$$

此因$(V^{\mu})=(1,0,0,0)$之故。

我们曾经在 3.2.8 节给出了爱因斯坦曲率张量

$$G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R \tag{3.4.3}$$

$G^{\mu\nu}$的张量性可根据 $R_{\mu\nu\alpha}{}^{\beta}$ 的张量性导出。我们曾经证明,在流形空间赋予度规 $g_{\mu\nu}$之后,由算子 $\nabla_{\mu}\nabla_{\nu} - \nabla_{\nu}\nabla_{\mu}$ 唯一地定义了黎曼张量 $R_{\mu\nu\alpha}{}^{\beta}$(见 3.2.8 节)。因此,$R_{\mu\nu\alpha}{}^{\beta}$ 的一次缩并 $R_{\mu\alpha}\equiv R_{\mu\nu\alpha}{}^{\nu}$(即 Ricci 曲率)以及二次缩并 $R\equiv R_{\mu}{}^{\mu}$(即 Ricci 标量)均为张量。由方程(3.4.3),$G^{\mu\nu}$也是张量。$G_{\mu\nu}$反映的是空间的几何性质。在平直空间,$G^{\mu\nu}=0$(因为 $R^{\mu\nu}=0$, $R=0$)。平直空间也就意味着不存在物质,因此,$T_{\mu\nu}=0$。$G^{\mu\nu}$是表征几何的一个张量,$T_{\mu\nu}$是表征物质的一个张量,它们在平直空间(无物质存在时)均为零。因此,在平直空间(无引力存在时),下式是成立的

$$G^{\mu\nu} = \kappa T^{\mu\nu} \tag{3.4.4}$$

其中 κ 是一任意比例常数。

由于几何与引力具有惊人的相似性,因此,我们可以推想,反映几何的量 $G^{\mu\nu}$与反映引力的量 $T^{\mu\nu}$是严格对应的。于是可以假定,张量方程(3.4.4)在有引力存在时也有效。实际上,由于方程(3.4.4)是张量方程,在无引力存在时(即在闵可夫斯基空间)是正确的;根据对应原理(见 3.3.1 节),存在引力时(即在黎曼空间)也是正确的。由方程(3.4.3)和(3.4.4),我们便得到了爱因斯坦场方程

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = \kappa T^{\mu\nu} \tag{3.4.5}$$

在方程(3.4.5)两边同时作用 $g_{\mu\sigma}$之后,对指标 σ 和 ν 缩并,注意到

$$g_{\mu\sigma}g^{\mu\nu} = \delta_{\sigma}{}^{\nu} \tag{3.4.6}$$

的缩并是 4,便得

$$R - 2R = \kappa T \tag{3.4.7}$$

即

$$R = -\kappa T \tag{3.4.8}$$

其中 $T=g_{\mu\sigma}T^{\mu\nu}|_{\sigma=\nu}\equiv T_{\nu}{}^{\nu}$。

为了确定系数 κ，考虑弱场条件下的牛顿极限。由于牛顿理论是客观世界的很好近似，广义相对论要求在一级近似之下给出牛顿结果。取方程(3.4.5)中的一个特殊方程，令 $\mu=\nu=0$，则有

$$R^{00}-\frac{1}{2}g^{00}R=\kappa T^{00} \tag{3.4.9}$$

或将上式写成(同时下降指标并顾及方程(3.4.2))

$$R_{00}-\frac{1}{2}g_{00}R=\kappa T_{00}=\kappa\rho \tag{3.4.10}$$

由于是弱场一级近似，因此(参见3.1.4节)，$g_{\mu\nu}$除了

$$g_{00}=-(1+2\varphi) \tag{3.4.11}$$

之外，其他分量均可视为常数，其中 $g_{ij}(i\neq j)$很小，可以作为零处理，而 g_{ii}(不对 i 求和)为1。方程(3.4.11)中的 φ 是牛顿引力位，取负值(无穷远处为零)。

考察方程(3.4.10)，我们只需根据方程(3.2.156)计算 R_{00}。根据后面的计算就会发现，只有 $\Gamma^{\alpha}{}_{00}$是我们感兴趣的，其他分量均可视为零处理(只考虑弱场一级近似)。这时，$\Gamma^{\lambda}{}_{00}$可表示成

$$\Gamma^{\lambda}{}_{00}=\frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}\left(\frac{\partial g_{0\sigma}}{\partial x^0}+\frac{\partial g_{0\sigma}}{\partial x^0}-\frac{\partial g_{00}}{\partial x^\sigma}\right) \tag{3.4.12}$$

$$\begin{aligned}\Gamma^{0}{}_{00}&=\frac{1}{2}g^{0\sigma}\left(2\frac{\partial g_{0\sigma}}{\partial x^0}-\frac{\partial g_{00}}{\partial x^\sigma}\right)=\frac{1}{2}g^{00}\left(2\frac{\partial g_{00}}{\partial x^0}-\frac{\partial g_{00}}{\partial x^0}\right)\\&=\frac{1}{2}g^{00}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^0}\end{aligned} \tag{3.4.13}$$

$$\Gamma^{i}{}_{00}=\frac{1}{2}g^{i\sigma}\left(2\frac{\partial g_{0\sigma}}{\partial x^0}-\frac{\partial g_{00}}{\partial x^\sigma}\right)=\frac{\partial g^{i}_{0}}{\partial x^0}-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{00}}{\partial x_i}=-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{00}}{\partial x_i} \tag{3.4.14}$$

或者合并写成

$$\Gamma^{\lambda}{}_{00}=-\frac{1}{2}\eta^{\lambda\varepsilon}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^\varepsilon}=\eta^{\lambda\varepsilon}\frac{\partial\varphi}{\partial x^\varepsilon} \tag{3.4.15}$$

注意 $\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}$的其他分量均可视为零(在弱场一阶近似之下)。又根据方程(3.2.156)，对指标 ν 和 β 缩并得到 Ricci 曲率张量(参见方程(3.2.145)和(3.2.156))

$$R_{\mu\alpha} \equiv R_{\mu\nu\alpha}{}^{\nu} = \frac{\partial\Gamma^{\nu}{}_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial\Gamma^{\nu}{}_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu}} + \Gamma^{\sigma}{}_{\mu\alpha}\Gamma^{\nu}{}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\sigma}{}_{\nu\alpha}\Gamma^{\nu}{}_{\mu\sigma} \tag{3.4.16}$$

因此

$$\begin{aligned} R_{00} \equiv R_{0\nu0}{}^{\nu} &= \frac{\partial\Gamma^{\nu}{}_{00}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial\Gamma^{\nu}{}_{\nu0}}{\partial x^{0}} + \Gamma^{\sigma}{}_{00}\Gamma^{\nu}{}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\sigma}{}_{\nu0}\Gamma^{\nu}{}_{0\sigma} \\ &= \frac{\partial\Gamma^{\nu}{}_{00}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial\Gamma^{0}{}_{00}}{\partial x^{0}} + \Gamma^{0}{}_{00}\Gamma^{0}{}_{00} - \Gamma^{0}{}_{00}\Gamma^{0}{}_{00} \\ &= \partial_i\Gamma^{i}{}_{00} \end{aligned} \tag{3.4.17}$$

再根据方程(3.4.7)

$$R = -\kappa T = -\kappa(T_0{}^0 + T_i{}^i) \approx -\kappa T_0{}^0 = \kappa T_{00} \tag{3.4.18}$$

不难证明,在弱场一阶近似之下,对 $T_0{}^0$ 的指标进行下降操作之后,正好得到 $-T_{00}(=T_0{}^0)$。将方程(3.4.2)代入上式,得

$$R = \kappa\rho \tag{3.4.19}$$

将方程(3.4.11)、(3.4.15)、(3.4.17)、(3.4.19)代入方程(3.4.10),得

$$\partial_i\Gamma^{i}{}_{00} + \frac{1}{2}(1+2\varphi)\kappa\rho = \kappa\rho \tag{3.4.20}$$

考察上面的方程,与 $\kappa\rho$ 比较,$\varphi\kappa\rho$ 是高阶小量(注意弱场一阶近似条件),略去,因此有

$$\partial_i\Gamma^{i}{}_{00} = \frac{1}{2}\kappa\rho \tag{3.4.21}$$

将方程(3.4.15)代入方程(3.4.21),得

$$\Delta\varphi = \frac{1}{2}\kappa\rho \tag{3.4.22}$$

其中 Δ 是拉普拉斯算子。

按照牛顿理论,引力位 φ 满足 Poisson 方程

$$\Delta\varphi = 4\pi G\rho \tag{3.4.23}$$

其中 G 是万有引力常数。比较方程(3.4.22)与(3.4.23),得

$$\kappa = 8\pi G \tag{3.4.24}$$

将方程(3.4.24)代入方程(3.4.5),并下降 $\mu\nu$ 指标,场方程可表示成

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G T_{\mu\nu} \tag{3.4.25}$$

由上述推理逆推回去,我们知道这个场方程的一级近似给出牛顿引力理论。

方程(3.4.25)关于指标 μ 和 ν 是对称的,因此,有 10 个独立的方程。从形式上看,$g_{\mu\nu}$也正好有 10 个独立分量(因为 $g_{\mu\nu}$是对称的),满足 10 个微分方程,从而可以求解出 $g_{\mu\nu}$。但实际上,由于存在 4 个 Bianchi 恒等式(3.2.153)

$$\nabla_{\mu} G^{\mu\nu} = 0 \tag{3.4.26}$$

独立的方程个数只有 6 个。这就是说,$g_{\mu\nu}$有四个自由度可供任意选择。这很类似于电磁学中的麦克斯韦方程,看起来有四个独立的方程(一个标量方程和一个三维矢量方程),但由于连续性方程自动满足(类似于 Bianchi 恒等式),因此,真正独立的方程只有 3 个,留有一个自由度可供任意选择。通常的做法是加洛伦兹条件,或叫洛伦兹规范,以解除所论自由度。同样,对于爱因斯坦场方程,需要加进四个规范条件,以解除上述四个自由度。比如,选取如下四个规范条件

$$\partial_{\mu}(\sqrt{g}g^{\lambda\mu}) = 0 \tag{3.4.27}$$

则可解除四个自由度,其中 g 是 $g_{\mu\nu}$的行列式的负值。条件(3.4.27)也称为谐和坐标条件(Weinberg,1972)。条件(3.4.27)与下列条件

$$g^{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} = 0 \tag{3.4.28}$$

是等价的。为了证实这一点,我们从 $\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}$的表达式(参见方程(3.2.102))

$$\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\sigma\lambda}\left(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}}\right) \tag{3.4.29}$$

出发,在上式两边同时乘以 $g^{\mu\nu}$

$$g^{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\sigma\lambda}g^{\mu\nu}\left(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}}\right) \tag{3.4.30}$$

由于

$$g_{\alpha\beta}g^{\beta\mu} = \delta_{\alpha}{}^{\mu} \tag{3.4.31}$$

对上述方程求偏导

$$g_{\alpha\beta}\partial_\nu g^{\beta\mu} = -g^{\beta\mu}\partial_\nu g_{\alpha\beta} \tag{3.4.32}$$

又因 g 是 $g_{\mu\nu}$ 的行列式的负值，我们有（Weinberg，1972）

$$\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\sigma g_{\mu\nu} = g^{-\frac{1}{2}}\partial_\sigma g^{\frac{1}{2}} \tag{3.4.33}$$

将方程（3.4.32）和（3.4.33）代入方程（3.4.30），得

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu}\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(g^{\sigma\lambda}\partial_\nu g_{\mu\sigma} + g^{\sigma\lambda}\partial_\mu g_{\nu\sigma}) - \frac{1}{2}g^{\sigma\lambda}g^{\mu\nu}\partial_\sigma g_{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(-g_{\mu\sigma}\partial_\nu g^{\sigma\lambda} - g_{\nu\sigma}\partial_\mu g^{\sigma\lambda}) - g^{\sigma\lambda}g^{-\frac{1}{2}}\partial_\sigma g^{\frac{1}{2}} \\ &= -\frac{1}{2}\delta^\nu{}_\sigma\partial_\nu g^{\sigma\lambda} - \frac{1}{2}\delta^\mu{}_\sigma\partial_\mu g^{\sigma\lambda} - g^{\sigma\lambda}g^{-\frac{1}{2}}\partial_\sigma g^{\frac{1}{2}} \\ &= -\partial_\sigma g^{\sigma\lambda} - g^{\sigma\lambda}g^{-\frac{1}{2}}\partial_\sigma g^{\frac{1}{2}} \\ &= -g^{-\frac{1}{2}}(g^{-\frac{1}{2}}\partial_\sigma g^{\sigma\lambda} + g^{\sigma\lambda}\partial_\sigma g^{-\frac{1}{2}}) \\ &= -g^{-\frac{1}{2}}\partial_\sigma(\sqrt{g}g^{\sigma\lambda}) \end{aligned} \tag{3.4.34}$$

由方程（3.4.34）可以看出，条件（3.4.27）与条件（3.4.28）等价。

3.5　几种常见的度规及应用

广义相对论有三大经典预言：光线偏转，行星轨道近日点进动（简称近点进动），以及引力频移（或引力红移）。引力频移效应已在 3.1.5 节阐述。根据广义相对论，引力频移效应是由于发光原子处于具有不同引力位的位置因而具有不同的光谱频率所致，或者等价地说，处于具有不同引力位处的原子钟具有不同的运行速率所致。我们认为，从本质上来说，引力频移是由于光子行进了一段具有引力位差的路程之后，其能量增益了（紫移）或损失了（红移）（Shen et al.，1993a）。引力频移效应已得到众多实验的支持（见 3.1.5 节）。引力频移可以直接根据等效原理、能量守恒原理以及量子论推出（Misner et al.，1973；Shen et al.，1993a）。爱因斯坦（Einstein，1907－1908）曾在狭义相对论框架之下，应用能量守恒原理和量子论推导出了光线经过太阳时的偏转，其结果是广义相对论预言结果值的一半。实际上，只有真正知道了度规张量 $g_{\mu\nu}$ 才可以得到广义相

对论的所有预言。后面的 3.5.1 节和 3.5.2 节主要是为了确定 $g_{\mu\nu}$，接下去的几节则是应用。

3.5.1 Schwarzschild 度规

我们考虑质量为 M 的均质无旋转圆球产生的静态的、球对称的引力场。根据对称性分析，原时 $d\tau$ 取如下形式（Weinberg, 1972; Wald, 1984）

$$d\tau^2 = B(r)dt^2 - A(r)dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\lambda^2) \tag{3.5.1}$$

其中(t,r,θ,λ)是四维球面坐标（t 是时间坐标，r 是向径的模，θ 是极角或余纬，λ 是经度）。注意到

$$d\tau^2 = -g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \tag{3.5.2}$$

可取

$$x^0 = t, \quad x^1 = r, \quad x^2 = \theta, \quad x^3 = \lambda \tag{3.5.3}$$

这个坐标系（参考系）是以圆球中心为原点、以遥远恒星定向的球面坐标系，称之为准惯性球面坐标系。如果将其中的球坐标取为笛卡尔坐标，则称之为准惯性笛卡尔坐标系。

比较方程(3.5.1)和方程(3.5.2)的同类项系数，得到二阶协变度规张量

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -B(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{bmatrix} \tag{3.5.4}$$

由上式直接可以写出二阶逆变度规张量

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{B(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{A(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{r^2\sin^2\theta} \end{bmatrix} \tag{3.5.5}$$

以及度规 $g_{\mu\nu}$ 的行列式

$$g = |g_{\mu\nu}| = -r^4 A(r) B(r) \sin^2\theta \tag{3.5.6}$$

为了确定函数 $A(r)$ 和 $B(r)$，需要利用场方程(3.4.25)。当 $r \to \infty$ 时，场方程变为

$$R_{\mu\nu} = 0 \tag{3.5.7}$$

根据仿射联络的表达式(3.2.102)，有

$$\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma}\left(\frac{\partial g_{\sigma\mu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}}\right) \tag{3.5.8}$$

将方程(3.5.3)～(3.5.5)代入上式，$\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}$ 的非零分量为

$$\Gamma^{t}{}_{tr} = \Gamma^{t}{}_{rt} = \frac{1}{2B(r)}\frac{\mathrm{d}B(r)}{\mathrm{d}r}, \qquad \Gamma^{\lambda}{}_{tt} = \frac{1}{2A(r)}\frac{\mathrm{d}B(r)}{\mathrm{d}r}$$

$$\Gamma^{r}{}_{rr} = \frac{1}{2A(r)}\frac{\mathrm{d}A(r)}{\mathrm{d}r}, \qquad \Gamma^{r}{}_{\theta\theta} = -\frac{r}{A(r)}$$

$$\Gamma^{\theta}{}_{r\theta} = \Gamma^{\theta}{}_{\theta r} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma^{\lambda}{}_{r\lambda} = \Gamma^{\lambda}{}_{\lambda r} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma^{r}{}_{\lambda\lambda} = -\frac{r\sin^2\theta}{A(r)},$$

$$\Gamma^{\lambda}{}_{\lambda\theta} = \Gamma^{\lambda}{}_{\theta\lambda} = \cot\theta, \quad \Gamma^{\theta}{}_{\lambda\lambda} = -\sin\theta\cos\theta \tag{3.5.9}$$

其他分量均为零。这里需注意，方程(3.5.9)中的指标 t,r,θ,λ 分别对应于具体的 0,1,2,3 分量，没有任何求和意义。再利用黎曼张量 $R_{\mu\nu\alpha}{}^{\beta}$ 与仿射联络 $\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}$ 的关系式(3.2.156)

$$R_{\mu\nu\alpha}{}^{\beta} = \frac{\partial \Gamma^{\beta}{}_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial \Gamma^{\beta}{}_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu}} + \Gamma^{\sigma}{}_{\mu\alpha}\Gamma^{\beta}{}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\sigma}{}_{\nu\alpha}\Gamma^{\beta}{}_{\mu\sigma} \tag{3.5.10}$$

对指标 ν 和 β 缩并，得 Ricci 张量(参见方程(3.4.16))

$$R_{\mu\alpha} = \frac{\partial \Gamma^{\nu}{}_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial \Gamma^{\nu}{}_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu}} + \Gamma^{\sigma}{}_{\mu\alpha}\Gamma^{\nu}{}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\sigma}{}_{\nu\alpha}\Gamma^{\nu}{}_{\mu\sigma} \tag{3.5.11}$$

将仿射联络各分量(3.5.9)代入方程(3.5.11)，得

$$R_{tt} = \frac{B''}{2A} - \frac{1}{4}\frac{B'}{A}\left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) + \frac{1}{r}\frac{B'}{A} \tag{3.5.12a}$$

$$R_{rr} = -\frac{B''}{2B} + \frac{1}{4}\frac{B'}{B}\left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) + \frac{1}{r}\frac{A'}{A} \tag{3.5.12b}$$

$$R_{\theta\theta} = 1 - \frac{r}{2A}\left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) - \frac{1}{A} \tag{3.5.12c}$$

$$R_{\lambda\lambda} = \sin^2\theta R_{\theta\theta} \tag{3.5.12d}$$

其他交叉分量均为零,也即 $R_{\mu\nu}$只有对角元是非零的,非对角元均为零。方程(3.5.12)中,A'、B'以及 B''分别表示相对于 r 的一阶导数以及二阶导数,即

$$A' \equiv \frac{\mathrm{d}A(r)}{\mathrm{d}r}, \quad B' \equiv \frac{\mathrm{d}B(r)}{\mathrm{d}r}, \quad B'' \equiv \frac{\mathrm{d}^2B(r)}{\mathrm{d}r^2} \tag{3.5.13}$$

由于当 $r\to\infty$ 时,$R_{\mu\nu}=0$,因此,由方程(3.5.12a)和方程(3.5.12b),当 $r\to\infty$ 时,有

$$0 = AR_{tt} + BR_{rr} = \frac{B'}{r} + \frac{BA'}{rA} \tag{3.5.14}$$

即

$$\frac{B'}{B} = -\frac{A'}{A} \tag{3.5.15}$$

由此得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(\ln B + \ln A) = 0 \tag{3.5.16}$$

也即

$$A(r)B(r) = 常数 \tag{3.5.17}$$

当 $r\to\infty$ 时,$g_{\mu\nu}\to\eta_{\mu\nu}$。对于闵可夫斯基度规 $\eta_{\mu\nu}$,若取坐标(t,r,θ,λ),则原时可表示成

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\tau^2 &= -\eta_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu \\ &= \mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}r^2 - r^2\mathrm{d}\theta^2 - r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\lambda^2\end{aligned} \tag{3.5.18}$$

方程(3.5.18)可通过坐标变换

$$t=t, \quad x = r\sin\theta\cos\lambda, \quad y = r\sin\theta\sin\lambda, \quad z = r\cos\theta \tag{3.5.19}$$

直接验证。因此,基于度规表示(3.5.4),同时利用条件“$r\to\infty$ 时,$g_{\mu\nu}\to\eta_{\mu\nu}$”,得

$$\lim_{r\to\infty}A(r) = 1, \quad \lim_{r\to\infty}B(r) = 1 \tag{3.5.20}$$

将上式代入方程(3.5.17)得常数为 1。因此

$$A(r)B(r) = 1 \tag{3.5.21}$$

再利用方程(3.5.12c),令 $R_{\theta\theta}=0$(当 $r\to\infty$ 时),顾及方程(3.5.21),得

$$-1 + \frac{r}{2A}\left(2\frac{B'}{B}\right) + \frac{1}{A} = 0 \tag{3.5.22}$$

即

$$rB' + B - 1 = 0 \tag{3.5.23}$$

或

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(rB) = 1 \tag{3.5.24}$$

因此

$$rB = r + C \tag{3.5.25}$$

其中 C 是常数。由于当 $r\to\infty$ 时

$$g_{00} \to -1 - 2\varphi = -1 + \frac{2GM}{r} \tag{3.5.26}$$

因此

$$C = -2GM \tag{3.5.27}$$

这里用到了条件 $B = -g_{00}$。将上式代入方程(3.5.25),并由方程(3.5.21)得

$$B(r) = 1 - \frac{2GM}{r} \tag{3.5.28a}$$

$$A(r) = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} \tag{3.5.28b}$$

于是,将方程(3.5.28)代入方程(3.5.4),得到了 Schwarzschild 度规(Schwarzschild,1916)

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -\left(1-\frac{2GM}{r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1-\frac{2GM}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{bmatrix} \tag{3.5.29}$$

或写成原时形式

$$\mathrm{d}\tau^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)\mathrm{d}t^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2 - r^2\mathrm{d}\theta^2 - r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\lambda^2 \tag{3.5.30}$$

度规表达式(3.5.29)反映了由均质(静态)圆球导致的空间弯

曲结构，作为一阶近似，将来会经常用到。

3.5.2 Robertson 度规和 Kerr 度规

Robertson(1935,1936,1962)曾经给出了一种描述静态对称引力场的度规(Weinberg,1972)

$$
\begin{aligned}
d\tau^2 = & \left[1 - \frac{2\alpha GM}{r} + 2(\beta - \alpha\gamma)\frac{G^2M^2}{r^2} + \cdots\right]dt^2 \\
& - \left(1 + \frac{2\gamma GM}{r} + \cdots\right)dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\lambda^2
\end{aligned}
\tag{3.5.31}
$$

其中，α,β,γ 等量是待定参数。当 $\alpha=\beta=\gamma=1$ 时，便得到了 Schwarzschild 度规(3.5.30)。令

$$
B(r) = 1 - \frac{2\alpha GM}{r} + 2(\beta - \alpha\gamma)\frac{G^2M^2}{r^2} + \cdots \tag{3.5.32a}
$$

$$
A(r) = 1 + 2\gamma\frac{GM}{r} + \cdots \tag{3.5.32b}
$$

则方程(3.5.31)仍可表示成一般形式(3.5.1)。

表达式(3.5.32)通常被称为 Robertson 展开式。爱因斯坦广义相对论预言 $\alpha=\beta=\gamma=1$。因此，Robertson 度规的意义更多地在于检验广义相对论方面。

对于一个旋转的均质圆球产生的引力场来说，已不再具有球对称性(这与牛顿引力场不同，在牛顿引力理论中应具有对称性)。这时，不能采用 Schwarzschild 度规或 Robertson 度规。对于以恒定角速度 ω 旋转的半径为 R 的均质圆球，Kerr(1963)找到了一个解，用空时间隔表示出来如下

$$
\begin{aligned}
d\tau^2 = & \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}dr^2 - r^2 d\theta^2 \\
& - r^2\sin^2\theta d\lambda^2 + \frac{GJ}{r}\sin^2\theta dt d\lambda
\end{aligned}
\tag{3.5.33}
$$

其中，J 是圆球的自转角动量，可表示为

$$
J = \frac{2MR^2}{5}\omega \tag{3.5.34}
$$

这里需要指出，无论是采用 Schwarzschild 度规(3.5.30)、Robertson 度规(3.5.31)、还是 Kerr 度规(3.5.33)，其适用范围均在质体(即均质圆球)的外部。在球体内部如何求定度规已超出了本书的范围。

3.5.3 一般运动方程

我们考察带有质量的粒子在静态对称引力场中的运动方程。粒子在一般引力场中的运动方程由下式决定(见 3.3.2 节)

$$\frac{d^2x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \tag{3.5.35}$$

对于光子来说，由于 $d\tau = 0$，因此，光子的运动方程可表示成

$$\frac{d^2x^\lambda}{d\sigma^2} + \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\sigma}\frac{dx^\nu}{d\sigma} = 0 \tag{3.5.36}$$

为了获得统一的描述，取任意参数 p，它与 τ 独立，于是，对于任意粒子(包括光子)，其运动方程可表示成

$$\frac{d^2x^\lambda}{dp^2} + \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{dp}\frac{dx^\nu}{dp} = 0 \tag{3.5.37}$$

将仿射联络分量(3.5.9)代入方程(3.5.37)，得

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2x^0}{dp^2} + \Gamma^0{}_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{dp}\frac{dx^\nu}{dp} = 0\\
&\frac{d^2x^1}{dp^2} + \Gamma^1{}_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{dp}\frac{dx^\nu}{dp} = 0\\
&\frac{d^2x^2}{dp^2} + \Gamma^2{}_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{dp}\frac{dx^\nu}{dp} = 0\\
&\frac{d^2x^3}{dp^2} + \Gamma^3{}_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{dp}\frac{dx^\nu}{dp} = 0
\end{aligned} \tag{3.5.38}$$

注意到指标(0,1,2,3)分别对应于(t,r,θ,λ)(比如 $\Gamma^0{}_{11} \equiv \Gamma^t{}_{rr}$，$\Gamma^0{}_{30} \equiv \Gamma^t{}_{\lambda t}$)，$x^0 = t$，$x^1 = r$，$x^2 = \theta$，$x^3 = \lambda$，因此

$$0 = \frac{d^2t}{dp^2} + \frac{B'}{B}\frac{dt}{dp}\frac{dr}{dp} \tag{3.5.39a}$$

$$0 = \frac{d^2r}{dp^2} + \frac{A'}{2A}\left(\frac{dr}{dp}\right)^2 - \frac{r}{A}\left(\frac{d\theta}{dp}\right)^2 - r\frac{\sin^2\theta}{A}\left(\frac{d\lambda}{dp}\right)^2 + \frac{B'}{2A}\left(\frac{dt}{dp}\right)^2 \tag{3.5.39b}$$

$$0 = \frac{d^2\theta}{dp^2} + \frac{2}{r}\frac{d\theta}{dp}\frac{dr}{dp} - \sin\theta\cos\theta\left(\frac{d\lambda}{dp}\right)^2 \qquad (3.5.39c)$$

$$0 = \frac{d^2\lambda}{dp^2} + \frac{2}{r}\frac{d\lambda}{dp}\frac{dr}{dp} + 2\cot\theta\frac{d\lambda}{dp}\frac{d\theta}{dp} \qquad (3.5.39d)$$

例如，方程(3.5.39b)可推证如下

$$\frac{d^2r}{dp^2} + \Gamma^r{}_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{dp}\frac{dx^\nu}{dp} = 0$$

$$\frac{d^2r}{dp^2} + \Gamma^r{}_{t\nu}\frac{dt}{dp}\frac{dx^\nu}{dp} + \Gamma^r{}_{r\nu}\frac{dr}{dp}\frac{dx^\nu}{dp} + \Gamma^r{}_{\theta\nu}\frac{d\theta}{dp}\frac{dx^\nu}{dp} + \Gamma^r{}_{\lambda\nu}\frac{d\lambda}{dp}\frac{dx^\nu}{dp} = 0$$

$$\frac{d^2r}{dp^2} + \Gamma^r{}_{tt}\left(\frac{dt}{dp}\right)^2 + \Gamma^r{}_{rr}\left(\frac{dr}{dp}\right)^2 + \Gamma^r{}_{\theta\theta}\left(\frac{d\theta}{dp}\right)^2 + \Gamma^r{}_{\lambda\lambda}\left(\frac{d\lambda}{dp}\right)^2 = 0$$

$$\frac{d^2r}{dp^2} + \frac{B'}{2A}\left(\frac{dt}{dp}\right)^2 + \frac{A'}{2A}\left(\frac{dr}{dp}\right)^2 - \frac{r}{A}\left(\frac{d\theta}{dp}\right)^2 - \frac{r\sin^2\theta}{A}\left(\frac{d\lambda}{dp}\right)^2 = 0 \qquad (3.5.40)$$

上式的最后一式即方程(3.5.39b)。其他几个方程的推证略去。

我们考察粒子绕中心天体的运动。假定中心天体产生的引力场是静态球对称的，这时，可以认为粒子的轨道始终处于一个平面。不失普遍性，假定粒子的运动轨道在赤道面内，即

$$\theta = \frac{\pi}{2} \qquad (3.5.41)$$

这相当于已解出了一个以 p 为参数的函数 $\theta(p)$，$\theta(p)$ 为常数。由方程(3.5.39d)、(3.5.39a)，得(注意 $d\theta\equiv 0$)

$$\frac{d^2\lambda}{dp^2}\frac{1}{d\lambda/dp} + \frac{2}{r}\frac{dr}{dp} = 0$$

$$\frac{d^2t}{dp^2}\frac{1}{dt/dp} + \frac{B'}{B}\frac{dr}{dp} = 0 \qquad (3.5.42)$$

即

$$\frac{d}{dp}\left(\ln\frac{d\lambda}{dp} + \ln r^2\right) = 0 \qquad (3.5.43a)$$

$$\frac{d}{dp}\left(\ln\frac{dt}{dp} + \ln B\right) = 0 \qquad (3.5.43b)$$

分别积分方程(3.5.43a)、(3.5.43b)，得到如下两个微分方程

$$r^2\frac{d\lambda}{dp} = J \qquad (3.5.44a)$$

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}p}=\frac{C}{B} \tag{3.5.44b}$$

其中 J 和 C 是常数。

由于 p 是任意选定的参数,可以将常数 C 吸收到 p 中去,故方程(3.5.44b)又可写成

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}p}=\frac{1}{B} \tag{3.5.45}$$

但需注意,不能同时将 J 吸收到 p 之中。将方程(3.5.41)、方程(3.5.44a)和方程(3.5.45)代入方程(3.5.39b),得

$$\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}p^2}+\frac{A'}{2A}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}p}\right)^2-\frac{J^2}{r^3A}+\frac{B'}{2AB^2}=0 \tag{3.5.46}$$

在上式两边同乘以 $2A\mathrm{d}r/\mathrm{d}p$,可得(注意到 $A'=\mathrm{d}A/\mathrm{d}r$, $B'=\mathrm{d}B/\mathrm{d}r$)

$$2A\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}p}\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}p^2}+\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}p}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}p}\right)^2-\frac{2J^2}{r^3}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}p}+\frac{1}{B^2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}p}=0 \tag{3.5.47}$$

因此

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left[A\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}p}\right)^2+\frac{J^2}{r^2}-\frac{1}{B}\right]=0 \tag{3.5.48}$$

积分,得

$$A\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}p}\right)^2+\frac{J^2}{r^2}-\frac{1}{B}=-E \tag{3.5.49}$$

其中 E 是积分常数。

将方程(3.5.41)、方程(3.5.44a)和方程(3.5.45)代入方程(3.5.1),得

$$\mathrm{d}\tau^2=B\left(\frac{1}{B}\mathrm{d}p\right)^2-A\mathrm{d}r^2-r^2\left(\frac{J}{r^2}\right)^2\mathrm{d}p^2 \tag{3.5.50}$$

再将方程(3.5.49)代入上式,得

$$\mathrm{d}\tau^2=\left[\frac{1}{B}-\frac{A\mathrm{d}r^2}{\mathrm{d}p^2}-\frac{J^2}{r^2}\right]\mathrm{d}p^2=E\mathrm{d}p^2 \tag{3.5.51}$$

由上式可知,积分常数 $E\geqslant0$。对于有质粒子,$E>0$。对于光子,$E=0$(因为光子的运动方程由 $\mathrm{d}\tau=0$ 决定)。

若以时间 t 为参数,基于方程(3.5.45),可以将方程(3.5.44a)、(3.5.49)、(3.5.51)分别改写成如下形式:

$$r^2 \frac{d\lambda}{dt} = BJ \tag{3.5.52}$$

$$\frac{A}{B^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{J^2}{r^2} - \frac{1}{B} = -E \tag{3.5.53}$$

$$d\tau^2 = EB^2 dt^2 \tag{3.5.54}$$

方程(3.5.53)给出了以 t 为参数的轨道。若考虑 r 是 λ 的函数,则由方程(3.5.52)和方程(3.5.53)得

$$\frac{A}{r^4}\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + \frac{1}{r^2} - \frac{1}{BJ^2} = -E/J^2 \tag{3.5.55}$$

上式可通过积分方式求解,即先写出

$$\frac{dr}{d\lambda} = \left[\left(-\frac{E}{J^2} + \frac{1}{BJ^2} - \frac{1}{r^2}\right)\frac{r^4}{A}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{3.5.56}$$

再根据上式积分,得

$$\lambda = \int \frac{\sqrt{A}}{r^2\left[\frac{1}{J^2 B} - \frac{E}{J^2} - \frac{1}{r^2}\right]^{\frac{1}{2}}} dr \tag{3.5.57}$$

以后求解光线偏转以及轨道近点进动时都要用到此方程。

3.5.4 光线偏转

在无引力空间,光束沿直线传播。存在引力场时,光束受到引力作用而弯曲(参见图3.5.1)。我们考虑光束掠过中心天体 M 表面时的情形。由于光子的运动方程由 $d\tau^2=0$ 决定,因此,根据方程(3.5.51), $E=0$。为了求得积分常数 J,考虑光子掠过 M 表面时的那一点。在这一点,根据光线路径的对称性, r 作为 λ 的函数应该取极值,即有

$$\left.\frac{dr}{d\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_0} = 0 \tag{3.5.58}$$

将上式代入方程(3.5.55),得(注意到 $E=0$)

$$\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{B_0 J^2} = 0 \tag{3.5.59}$$

其中 r_0 对应于极值点。由此得到

$$J = \frac{r_0}{\sqrt{B_0}} \tag{3.5.60}$$

其中

$$B_0 \equiv B(r_0) \tag{3.5.61}$$

光子从无限远行进到 r 处所偏转的角度由方程(3.5.57)给出(注意 $E=0$,并将方程(3.5.60)代入)

$$\lambda(r) - \lambda(r)\big|_{r=\infty} = \int_r^{\infty} \frac{A^{\frac{1}{2}}}{r^2\left(\frac{1}{J^2B} - \frac{1}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \mathrm{d}r = \int_r^{\infty} \frac{A^{\frac{1}{2}}}{r^2\left(\frac{B_0}{r_0^2B} - \frac{1}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \mathrm{d}r \tag{3.5.62}$$

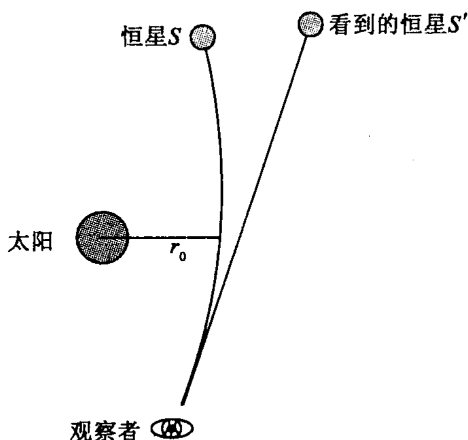


图3.5.1　恒星 S 发射的光线受中心天体(例如太阳)的影响,光线发生弯曲(偏转),由观测者看到的星体的位置是直线所示的位置,即图中的 S'

由于光线具有可逆性,因此光束从无限远到 $r=r_0$ 处所偏转过的角度与从 $r=r_0$ 到无限远处所偏转的角度相同。如果光束是直线,从无限远处到 r_0 处 λ 角的变化应该是 $\pi/2$。因此,光束掠过质体 M 的总的偏转角为

$$\Delta\lambda = 2\left|\lambda(r_0) - \lambda_{\infty}\right| - \pi \tag{3.5.63}$$

由 Robertson 展开式(3.5.32),取至 GM/r 量级,有

$$B(r)=1-\frac{2\alpha GM}{r} \tag{3.5.64}$$

$$A(r)=1+2\gamma\frac{GM}{r} \tag{3.5.65}$$

由此可以求出

$$\begin{aligned}\frac{r^2}{r_0^2}\frac{B_0}{B}-1&=\frac{r^2}{r_0^2}\frac{1-2\alpha GM/r_0}{1-2\alpha GM/r}-1\\&=\frac{r^2}{r_0^2}(1-2\alpha GM/r_0+2\alpha GM/r)-1\\&=\left(\frac{r^2}{r_0^2}-1\right)-2\alpha GM\left(\frac{r^2}{r_0^2}-1\right)\frac{r}{r_0(r+r_0)}\\&=\left(\frac{r^2}{r_0^2}-1\right)\left[1-\frac{2\alpha GMr}{r_0(r+r_0)}\right]\end{aligned}$$

$$A^{\frac{1}{2}}(r)=1+\gamma\frac{GM}{r} \tag{3.5.66}$$

将上边两式代入方程(3.5.62),得

$$\begin{aligned}\lambda(r)-\lambda_\infty&=\int_r^\infty\frac{A^{\frac{1}{2}}}{r\left(\frac{r^2}{r_0^2}-1\right)^{\frac{1}{2}}\left[1-\frac{2\alpha GMr}{r_0(r+r_0)}\right]^{\frac{1}{2}}}\mathrm{d}r\\&=\int_r^\infty\frac{1}{r\left(\frac{r^2}{r_0^2}-1\right)^{\frac{1}{2}}}\left(1+\gamma\frac{GM}{r}\right)\left[1+\frac{\alpha GMr}{r_0(r+r_0)}\right]\mathrm{d}r\\&=\int_r^\infty\frac{1}{r\left(\frac{r^2}{r_0^2}-1\right)^{\frac{1}{2}}}\left[1+\frac{\gamma GM}{r}+\frac{\alpha GMr}{r_0(r+r_0)}\right]\mathrm{d}r\\&=I_1+I_2+I_3\end{aligned} \tag{3.5.67}$$

其中

$$I_1=\int_r^\infty\frac{1}{r\left(\frac{r^2}{r_0^2}-1\right)^{\frac{1}{2}}}\mathrm{d}r=r_0\int_r^\infty\frac{1}{r(r^2-r_0^2)^{\frac{1}{2}}}\mathrm{d}r$$

$$=r_0\frac{1}{r_0}\mathrm{arcsec}\frac{r}{r_0}\Big|_r^\infty=\frac{\pi}{2}-\mathrm{arcsec}\frac{r}{r_0} \tag{3.5.68a}$$

$$I_2 = \int_r^{\infty} \frac{1}{r\left(\frac{r^2}{r_0^2} - 1\right)^{\frac{1}{2}}} \frac{\gamma GM}{r} \mathrm{d}r = rGM \int_r^{\infty} \frac{\mathrm{d}r}{r^2\left(\frac{r^2}{r_0^2} - 1\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \gamma GM \int_{\theta_r}^{\theta_\infty} \frac{r_0 \sec\theta \tan\theta}{r_0^2 \sec^2\theta (\sec^2\theta - 1)^{\frac{1}{2}}} \mathrm{d}\theta \text{（其中已做变量代换 } r = r_0 \sec\theta\text{）}$$

$$= \frac{\gamma GM}{r_0} \int_{\theta_r}^{\theta_\infty} \cos\theta \mathrm{d}\theta = \frac{\gamma GM}{r_0} \sin\theta \Big|_{\theta_r}^{\theta_\infty = \frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\gamma GM}{r_0}\left[1 - \sin\left(\operatorname{arcsec} \frac{r}{r_0}\right)\right] \tag{3.5.68b}$$

$$I_3 = \int_r^{\infty} \frac{1}{r\left(\frac{r^2}{r_0^2} - 1\right)^{\frac{1}{2}}} \frac{\alpha GMr}{r_0(r + r_0)} \mathrm{d}r = \frac{\alpha GM}{r_0} \int_r^{\infty} \frac{1}{(r + r_0)\left(\frac{r^2}{r_0^2} - 1\right)^{\frac{1}{2}}} \mathrm{d}r$$

$$= \frac{\alpha GM}{r_0} \int_{\theta_r}^{\theta_\infty} \frac{r_0 \sec\theta \tan\theta}{(r_0 \sec\theta + r_0)\tan\theta} \mathrm{d}\theta = \frac{\alpha GM}{r_0} \int_{\theta_r}^{\theta_\infty} \left(1 - \frac{1}{\sec\theta + 1}\right) \mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{\alpha GM}{r_0}\left[\theta_\infty - \theta_r - \int_{\theta_r}^{\theta_\infty} \frac{\cos\theta}{\cos\theta + 1} \mathrm{d}\theta\right] \tag{3.5.68c}$$

其中

$$\int_{\theta_r}^{\theta_\infty} \frac{\cos\theta}{\cos\theta + 1} \mathrm{d}\theta = \int_{\theta_r}^{\theta_\infty} \frac{\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1 + 1} \mathrm{d}\theta = \int_{\theta_r}^{\theta_\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\tan^2\frac{\theta}{2}\right) \mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{1}{2}(\theta_\infty - \theta_r) - \int_{t_r}^{t_\infty} \frac{t^2}{1 + t^2} \mathrm{d}t \left(\text{令 } \tan\frac{\theta}{2} = t\right)$$

$$= \frac{1}{2}(\theta_\infty - \theta_r) - (t_\infty - t_r) + \int_{t_r}^{t_\infty} \frac{1}{1 + t^2} \mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}(\theta_\infty - \theta_r) - (t_\infty - t_r) + \arctan t \Big|_{t_r}^{t_\infty}$$

$$= \frac{1}{2}(\theta_\infty - \theta_r) - \left(\tan\frac{\theta_\infty}{2} - \tan\frac{\theta_r}{2}\right) + \left(\frac{\theta_\infty}{2} - \frac{\theta_r}{2}\right)$$

$$= \theta_\infty - \theta_r - \left(\tan\frac{\theta_\infty}{2} - \tan\frac{\theta_r}{2}\right) \tag{3.5.69}$$

故有

$$I_3 = \frac{\alpha GM}{r_0}\left(\tan\frac{\theta_\infty}{2} - \tan\frac{\theta_r}{2}\right) = \frac{\alpha GM}{r_0}\left(\tan\frac{\pi}{4} - \tan\frac{\theta_r}{2}\right)$$

$$= \frac{\alpha GM}{r_0}\left[1 - \tan\left(\frac{1}{2}\operatorname{arcsec}\frac{r}{r_0}\right)\right] \tag{3.5.70}$$

将方程(3.5.68)代入方程(3.5.67),得

$$\lambda(r) - \lambda(\infty) = I_1 + I_2 + I_3$$

$$= \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcsec}\frac{r}{r_0} + \frac{\gamma GM}{r_0}\left[1 - \sin\left(\operatorname{arcsec}\frac{r}{r_0}\right)\right]$$

$$+ \frac{\alpha GM}{r_0}\left[1 - \tan\left(\frac{1}{2}\operatorname{arcsec}\frac{r}{r_0}\right)\right] \tag{3.5.71}$$

取方程(3.5.71)中的 $r = r_0$,并将其代入方程(3.5.63),就得到了光线掠过中心天体表面总的偏转角为

$$\Delta\lambda = 2\times\frac{\pi}{2} + 2\left(\frac{\gamma GM}{r_0} + \frac{\alpha GM}{r_0}\right) - \pi = \frac{4GM}{r_0}\frac{\alpha+\gamma}{2} \tag{3.5.72}$$

爱因斯坦(Einstein,1915a,b)给出的结果没有因子$(\alpha+\gamma)/2$,因为按照爱因斯坦广义相对论,$\alpha = \gamma = 1$。以太阳为例

$$M = M_S = 1.977\times10^{33}g,\quad r_0 = R_S = 6.95\times10^5\text{km} \tag{3.5.73}$$

注意到光速单位制,当 $\alpha = \gamma = 1$ 时,可以算出 $\Delta\varphi = 1.75''$。

自 1919 年至 1975 年的日全蚀期间,已进行了十几次有代表性的观测,其结果大多落在 1.7″与 2.0″之间,见表 3.5.1。

表 3.5.1 历次日蚀期间太阳引起的星光偏折观测(秦荣先,阎永廉,1987)

日食	观测序号	观测地点	星数	r_0(以太阳半径为单位)	$\Delta\lambda$(角秒)
1919.5.29	1	Sobral	7	2 - 6	1.98 ±0.12
	2	Principle	5	2 - 6	1.61 ±0.30
1922.9.21	3	澳大利亚	92	2.1 - 14.5	1.72 ±0.11
	4	澳大利亚	14	52.1 - 42	1.82 ±0.15
	5	澳大利亚	14	2 - 10	1.18 - 2.35

续表

日食	观测序号	观测地点	星数	r_0(以太阳半径为单位)	$\Delta\lambda$(角秒)
	6	澳大利亚	18	2 - 10	1.42 - 2.16
1929.5.9	7	Sumatra	17	1.5 - 7.5	2.24 ±0.10
1936.6.19	8	苏联	25	2 - 7.2	2.71 ±0.26
	9	日本	-	4 - 7	1.28 - 2.13
1947.5.20	10	巴西	51	3.3 - 10.2	2.01 ±0.27
1952.2.25	11	苏丹	10	2.1 - 8.6	1.70 ±0.10
1973.9	12	毛里塔尼亚	60	2 - 10	1.66 ±0.18
1974-1975	13	Green Bank, West Virginia	-	-	1.761 ±0.016

3.5.5　粒子轨道的近点进动

考虑粒子绕中心天体的运动。假定中心天体产生的引力场是静态球对称的，按牛顿理论，粒子的运动轨道是标准椭圆；但按照广义相对论，粒子的运动轨道并不是标准椭圆。粒子每绕中心天体转一圈，轨道的长半轴(或短半轴)方向就向前进动一个角度。在假定飞行粒子(行星)处于中心天体(太阳)赤道平面的情况下，这个角度可通过长半轴(或短半轴)方向的经度的变化来描述；因此，可将此进动角度记为 $\Delta\lambda$(参见图 3.5.2)。下面来推算这个量。

假定行星处于太阳赤道平面内，即 $\theta = \pi/2$。将 r 视为 λ 的函数，在轨道的近点和远点，$r(\lambda)$ 达到最小值 r_m 和最大值 r_M。因此，在这两点 $r(\lambda)$ 取极值，即有

$$\left.\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_m} = \left.\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_M} = 0 \tag{3.5.74}$$

将上式代入方程(3.5.55)，得

$$\frac{J^2}{r_m^2} - \frac{1}{B_m} = -E \tag{3.5.75a}$$

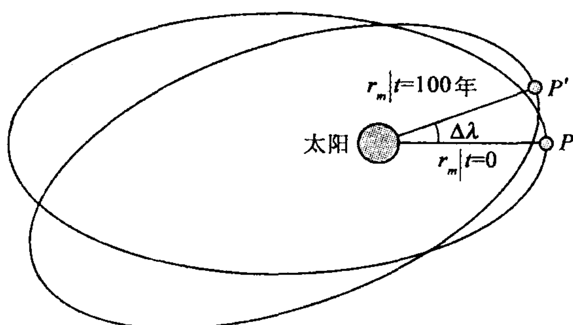


图 3.5.2 以太阳为焦点，行星绕太阳运行的轨迹是椭圆。假定在 $t=0$ 时刻，行星 P 位于近日点（简称近点），那么，行星每环绕太阳转一圈，它就向前（逆时针方向）进动一个微小角度 $\delta\lambda$；假定历经一百年，行星共环绕太阳转了 N 圈，则近点进动量为 $\Delta\lambda = N\delta\lambda$

$$\frac{J^2}{r_M^2} - \frac{1}{B_M} = -E \tag{3.5.75b}$$

其中

$$B_m \equiv B(r_m) \tag{3.5.76a}$$

$$B_M \equiv B(r_M) \tag{3.5.76b}$$

由方程(3.5.75)得

$$E = \frac{\dfrac{r_M^2}{B_M} - \dfrac{r_M^2}{B_m}}{r_M^2 - r_M^2} \tag{3.5.77}$$

$$J^2 = \frac{\dfrac{1}{B_m} - \dfrac{1}{B_M}}{\dfrac{1}{r_M^2} - \dfrac{1}{r_M^2}} \tag{3.5.78}$$

按牛顿理论，粒子从近点到远点历经的角度为 π；但按广义相对论，粒子从近点 r_m 到远点 r_M 所历经的角度为 $\lambda(r_M) - \lambda(r_m)$。因此，粒子转过一圈之后，多余的进动值为

$$\Delta\lambda = 2\left|\lambda(r_M) - \lambda(r_m)\right| - 2\pi \tag{3.5.79}$$

以 r_m 为起算点（即 $\lambda(r_m)=0$），由方程(3.5.57)，粒子在位置 r 处时转过的角度为

$$\lambda(r) - \lambda(r_m) = \int_{r_m}^{r} \frac{A^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}r}{r^2\left(\frac{1}{J^2B} - \frac{E}{J^2} - \frac{1}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}}} = \int_{r_m}^{r} \frac{A^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}r}{r\left(\frac{r^2}{J^2B} - \frac{Er^2}{J^2} - 1\right)^{\frac{1}{2}}} \tag{3.5.80}$$

根据 Schwarzschild 度规(3.5.30),得

$$B = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right), \quad A = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} \tag{3.5.81}$$

取至一阶近似,有(论证见后)

$$B^{-1} = 1 + \frac{2GM}{r} + 4\left(\frac{GM}{r}\right)^2 \tag{3.5.82a}$$

$$A^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{GM}{r} \tag{3.5.82b}$$

于是,将方程(3.5.82)分别代入方程(3.5.77)和方程(3.5.78),得

$$E = \frac{r_M^2\left(1 + \frac{2GM}{r_M} + 4\frac{G^2M^2}{r_M^2}\right) - r_m^2\left(1 + \frac{2GM}{r_m} + 4\frac{G^2M^2}{r_m^2}\right)}{r_M^2 - r_m^2}$$

$$= \frac{r_M^2 - r_m^2 + 2GM(r_M - r_m)}{r_M^2 - r_m^2} = 1 + \frac{2GM}{r_M + r_m} \tag{3.5.83a}$$

$$J^2 = \frac{\left(1 + \frac{2GM}{r_m} + \frac{4G^2M^2}{r_m^2}\right) - \left(1 + \frac{2GM}{r_M} + \frac{4G^2M^2}{r_M^2}\right)}{\frac{1}{r_m^2} - \frac{1}{r_M^2}}$$

$$= \frac{2GM\left(\frac{1}{r_m} - \frac{1}{r_M}\right) + 4G^2M^2\left(\frac{1}{r_m^2} - \frac{1}{r_M^2}\right)}{\frac{1}{r_m^2} - \frac{1}{r_M^2}}$$

$$= \frac{2GM}{\frac{1}{r_m} + \frac{1}{r_M}} + 4G^2M^2 \tag{3.5.83b}$$

由方程(3.5.83),得

$$\frac{r^2}{BJ^2} - \frac{Er^2}{J^2} - 1 = \frac{1}{J^2}r^2\left(1 + \frac{2GM}{r} + 4G^2M^2r^2\right) - \frac{Er^2}{J^2}r^2 - 1$$

$$= \frac{1}{J^2}(r^2 2GMr + 4G^2M^2) - \frac{E}{J^2}r^2 - 1$$

$$=\frac{1-E}{J^2}r^2+\frac{2GM}{J^2}r+\frac{4G^2M^2}{J^2}-1$$

$$=ar^2+br+h \tag{3.5.84}$$

其中

$$a=\frac{1-E}{J^2}=-\frac{2GM}{r_M+r_m}\frac{1}{J^2} \tag{3.5.85a}$$

$$b=\frac{2GM}{J^2} \tag{3.5.85b}$$

$$h=\frac{4G^2M^2}{J^2}-1 \tag{3.5.85c}$$

将方程(3.5.84)代入方程(3.5.79),得

$$\lambda(r)-\lambda(r_m)=\int_{r_m}^{r}\frac{1+\frac{GM}{r}}{r(ar^2+br+h)^{\frac{1}{2}}}\mathrm{d}r=q_1+GMq_2 \tag{3.5.86}$$

其中

$$q_1=\int_{r_m}^{r}\frac{1}{r(ar^2+br+h)^{\frac{1}{2}}}\mathrm{d}r \tag{3.5.87a}$$

$$q_2=\int_{r_m}^{r}\frac{1}{r^2(ar^2+br+h)^{\frac{1}{2}}}\mathrm{d}r \tag{3.5.87b}$$

由于

$$h=\frac{4G^2M^2}{J^2}-1<0\ (\because J^2>4G^2M^2)$$

$$(4ah)J^4=4\frac{2GM}{r_M+r_m}(J^2-4G^2M^2)$$

$$=4\frac{2GM}{r_M+r_m}\frac{2GM}{\frac{1}{r_M}+\frac{1}{r_m}}=4\frac{4G^2M^2}{\frac{(r_M+r_m)^2}{r_Mr_m}}$$

$$=\frac{4r_Mr_m}{(r_M+r_m)^2}(bJ^2)^2<b^2J^4 \tag{3.5.88}$$

因此

$$b^2>4ah \tag{3.5.89}$$

查积分表(王连祥等 1979,p. 264),可给出表达式(3.5.87)的积分结果

$$q_1 = \frac{1}{\sqrt{-h}} \arcsin \frac{br + 2h}{r\sqrt{b^2 - rah}} \Bigg|_{r_m}^{r} \tag{3.5.90a}$$

$$q_2 = -\frac{\sqrt{ar^2 + br + h}}{hr} \Bigg|_{r_m}^{r} - \frac{b}{2h} q_1 \tag{3.5.90b}$$

将方程(3.5.85)、(3.5.83b)代入方程(3.5.90),并用 r_M 替换 r,则有

$$q_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - 4G^2M^2J^{-2}}} \arcsin \frac{\dfrac{2GMr}{J^2} + \dfrac{8G^2M^2}{J^2} - 2}{rb\sqrt{1 - \dfrac{4r_M r_m}{(r_M - r_m)^2}}} \Bigg|_{r_m}^{r_M}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - 4G^2M^2J^{-2}}} \arcsin \frac{2GM - \dfrac{4GM}{\dfrac{1}{r_M} + \dfrac{1}{r_m}}}{2rGM \dfrac{r_M - r_m}{r_M + r_m}} \Bigg|_{r_m}^{r_M}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - 4G^2M^2J^{-2}}} \arcsin \frac{r - \dfrac{2r_M r_m}{r_M + r_m}}{r \dfrac{r_M - r_m}{r_M + r_m}} \Bigg|_{r_m}^{r_M}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - 4G^2M^2J^{-2}}} \left[\arcsin \frac{r_M - \dfrac{2r_M r_m}{r_M + r_m}}{r_M \dfrac{r_M - r_m}{r_M + r_m}} - \arcsin \frac{r_m - \dfrac{2r_M r_m}{r_M + r_m}}{r_m \dfrac{r_M - r_m}{r_M + r_m}} \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - 4G^2M^2J^{-2}}} [\arcsin(1) - \arcsin(-1)]$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{1 - 4G^2M^2J^{-2}}} \tag{3.5.91a}$$

$$q_2 = -\frac{\sqrt{ar_M^2 + br_M + h}}{hr_M} + \frac{\sqrt{ar_m^2 + br_m + h}}{hr_m} - \frac{b}{2h}\frac{\pi}{\sqrt{1 - 4G^2M^2J^{-2}}}$$

$$= -\frac{0}{hr_M} + \frac{0}{hr_m} + \frac{GM}{J^2}(1 - 4G^2M^2J^{-2})^{-1}\frac{\pi}{\sqrt{1 - 4G^2M^2J^{-2}}}$$

$$= GM(1 - 4G^2M^2J^{-2})^{-\frac{3}{2}}J^{-2}\pi \tag{3.5.91b}$$

由于

$$4G^2M^2J^{-2} << 1 \tag{3.5.92}$$

因此

$$q_1 = (1 + 2G^2M^2J^{-2})\pi$$

$$\approx \left[1 + 2G^2M^2\frac{1}{GM}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_M} + \frac{1}{r_m}\right)\right]\pi$$

$$= \pi + 2GM\frac{1}{L}\pi \tag{3.5.93a}$$

$$q_2 = [GM(1 + 6G^2M^2J^{-2})]J^{-2}\pi$$

$$\approx GM\frac{1}{GM}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_M} + \frac{1}{r_m}\right)\pi = \frac{1}{L}\pi \tag{3.5.93b}$$

其中

$$L = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_M} + \frac{1}{r_m}\right)\right]^{-1} \tag{3.5.94}$$

是半正焦距。将方程(3.5.93)代入方程(3.5.86),得

$$\lambda(r_M) - \lambda(r_m) = \pi + \frac{2GM\pi}{L} + GM\frac{\pi}{L}$$

$$= \pi + \frac{3GM\pi}{L} \tag{3.5.95}$$

于是,由方程(3.5.79),粒子转过一圈之后多余的进动值为

$$\Delta\lambda = 2|\lambda(r_M) - \lambda(r_m)| - 2\pi = \frac{6\pi GM}{L} \tag{3.5.96}$$

这个方程给出了一个粒子(或行星)绕中心天体旋转一圈之后的多余进动值,通称(广义相对论的)轨道近点进动。

在前面的推导过程中,$B^{-1}(r)$取至GM/r的二阶项,而$\sqrt{A(r)}$只取到GM/r的一阶项,这是因为B^{-1}处在分母中的一个代数算式中,

这个算式将 B^{-1} 的主项相互抵消了；而 $\sqrt{A(r)}$ 处在积分号内的分子上，取至一阶项就足够了。论证如下：

$$
\begin{aligned}
\lambda(r_M)-\lambda(r_m) &= \int_{r_m}^{r_M}\frac{\left(1-\dfrac{2GM}{r}\right)^{-\frac{1}{2}}}{r(ar^2+br+h)^{\frac{1}{2}}}\mathrm{d}r \\
&= \int_{r_m}^{r_M}\frac{1+\dfrac{GM}{r}+\dfrac{3}{2}\dfrac{G^2M^2}{r^2}}{r(ar^2+br+h)^{\frac{1}{2}}}\mathrm{d}r \\
&= \frac{6\pi GM}{L}+\frac{3}{2}G^2M^2\int_{r_m}^{r_M}\frac{\dfrac{1}{r^2}\mathrm{d}r}{r(ar^2+br+h)^{\frac{1}{2}}}
\end{aligned}
\tag{3.5.97}
$$

由于

$$
G^2M^2\int_{r_m}^{r_M}\frac{\dfrac{1}{r^2}\mathrm{d}r}{r(ar^2+br+h)^{\frac{1}{2}}}\begin{cases} > \dfrac{G^2M^2}{r_M^2}\displaystyle\int_{r_m}^{r_M}\frac{\mathrm{d}r}{r(ar^2+br+c)^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{G^2M^2}{r_M^2}q_1 \\ < \dfrac{G^2M^2}{r_m^2}\displaystyle\int_{r_m}^{r_M}\frac{\mathrm{d}r}{r(ar^2+br+h)^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{G^2M^2}{r_m^2}q_1 \end{cases}
\tag{3.5.98}
$$

而这两项均远远小于 $6\pi GM/L$。因此，无需考虑 $A^{\frac{1}{2}}$ 展开式中关于 GM/r 的二阶项。这也是我们写出方程(3.5.82a)、(3.5.82b)的原因。

若用轨道的长半轴 a 和偏心率 e 表示，则

$$
r_M=(1+e)a,\quad r_m=(1-e)a,\quad L=(1-e^2)a \tag{3.5.99}
$$

以水星绕太阳转动为例，可算出水星每绕太阳一圈近日点的进动量为 0.1038″(角秒)，进动的方向沿水星运动方向。由于水星一年绕太阳转 4.15 圈，因此，水星近日点每 100 年的进动量约为 43″。表 3.5.2 给出了水星、金星、地球和 Icarus 星的近日点进动值。

表 3.5.2 行星近日点多余进动的理论值和光学观测值(取自 Weinberg,1972)

行星	轨道长半轴 $a(10^6\text{km})$	轨道偏心率 e	圈数/百年	$\Delta\varphi$(角秒/百年)	
				广义相对论	观测值
水星	57.91	0.2056	415	42.95	43.11 ±0.5
金星	108.21	0.0068	149	8.6	8.4 ±4.8
地球	149.60	0.0167	100	3.8	5.0 ±1.2
Icarus	161.0	0.827	89	10.3	9.8 ±0.8

如果考虑人造地球卫星绕地球的转动,会有什么结果呢?让我们来估算一下。假定人造卫星的半正焦距 $L = 10000\text{km}$,

$$M = \frac{6\times10^{27}g}{2\times10^{33}g}M_s = 3\times10^{-6}M_s \qquad (3.5.100)$$

是用太阳的质量 M_s 表示的地球质量($6\times10^{27}g$ 是地球质量,$2\times10^{33}g$ 是太阳质量)。为了利用前面对水星进动的计算结果,设 L_0 是水星轨道的半正焦距。由于 $L_0=(1-e^2)a\approx58\times10^6\text{km}$,因此,绕地卫星的半焦距可表示成

$$L = \frac{10^4\text{km}}{58\times10^6\text{km}}L_0 = \frac{1}{58}\times10^{-2}L_0 \qquad (3.5.101)$$

由此可算出人造地球卫星每转一圈它的近地点将向运动方向进动的角度为

$$\Delta\lambda = \frac{6\pi GM}{L} = \frac{6\pi G\cdot3\times10^{-6}M_s}{\frac{1}{58}\times10^{-2}L_0} = 174\times10^{-4}\frac{6\pi GM_s}{L_0}$$

$$\approx 0.172''\times10^{-2} \qquad (3.5.102)$$

可见,卫星每转一百圈的进动角度为 0.172″。当然,这是假定地球为均质圆球的情形。

3.5.6 时钟、量杆及引力行为

采用 Schwarzschild 度规(3.5.29),原时可写成

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\lambda^2 \tag{3.5.103}$$

采用 Schwarzschild 度规意味着仅考虑由均质圆球产生的球对称静态引力场。

考虑时钟在引力场中的变化效应。设有两个完全相同的时钟 C_1 和 C_2，将它们校准之后分别置于 x^μ 和 x'^μ 处。假定时钟没有空间坐标移动，只有时间流逝，那么，时钟 C_1 和 C_2 在 x^μ 和 x'^μ 处的原时间隔分别由下式给出

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)dt^2 \tag{3.5.104}$$

$$d\tau'^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r'}\right)dt'^2 \tag{3.5.105}$$

由于 $d\tau'^2 = d\tau^2$，因此

$$\left(1 - \frac{2GM}{r'}\right)dt'^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)dt^2 \tag{3.5.106}$$

或写成

$$dt' = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{2GM}{r'}\right)^{-\frac{1}{2}}dt \tag{3.5.107}$$

准确到 GM/r，得

$$dt' = \left(1 - \frac{GM}{r} + \frac{GM}{r'}\right)dt \tag{3.5.108}$$

假定在 $r = \infty$ 处的时钟的单位秒长为 Δt，那么，在 $r = r'$ 处时钟的单位秒长为

$$\Delta t' = \left(1 + \frac{GM}{r'}\right)\Delta t \tag{3.5.109}$$

上式表明，在引力场中，时钟的单位秒长变长了。也就是说，时钟在引力场中变慢了。离开中心天体越远（从而引力位越高），时钟的运行速率越快。

时钟的运行速率在引力场中的变化与引力频移密切相关，参见 3.1.5 节。

设有一标准量杆 L，考虑它的瞬时度量。假定对 L 的两个端点 A

和 B 同时度量，并假定 L 足够短，那么，A 和 B 之间的空时间隔为

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\lambda^2 \tag{3.5.110}$$

由于是瞬时度量，因此 $dt = 0$，即有

$$d\tau^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\lambda^2 \tag{3.5.111}$$

当量杆置于 x'^{μ} 处时，有

$$d\tau'^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r'}\right)^{-1}dr'^2 - r'^2d\theta'^2 - r'^2\sin^2\theta' d\lambda'^2 \tag{3.5.112}$$

由于 $d\tau'^2 = d\tau^2$，由上边的两个方程得

$$\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\lambda^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r'}\right)^{-1}dr'^2 + r'^2d\theta'^2 + r'^2\sin^2\theta' d\lambda'^2 \tag{3.5.113}$$

当量杆在两处均为横向（即垂直于 r 方向）放置时，由于 $dr = dr' = 0$，因此

$$r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\lambda^2 = r'^2d\varphi'^2 + r'^2\sin^2\theta' d\lambda'^2 \tag{3.5.114}$$

这个方程的左边正好是 L，右边是 L'，因此，量杆横向放置时无论在什么位置都一样。

当量杆在两处均为径向放置时，由于 $d\theta = d\theta' = 0$，$d\lambda = d\lambda' = 0$，$dr = L$，$dr' = L'$，因此有

$$\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-\frac{1}{2}}L = \left(1 - \frac{2GM}{r'}\right)^{-\frac{1}{2}}L' \tag{3.5.115}$$

即

$$L' = \left(1 - \frac{2GM}{r'}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-\frac{1}{2}}L \tag{3.5.116}$$

准确到 GM/r，得

$$L' = \left(1 + \frac{GM}{r} - \frac{GM}{r'}\right)L \tag{3.5.117}$$

假定无穷远处的量杆长度为 L_0,则有

$$L' = \left(1 - \frac{GM}{r'}\right)L_0 \tag{3.5.118}$$

这个方程表明,当量杆沿径向放置时,尺度按因子$(1 - GM/r')$收缩。

若将 x'^{μ} 处径向放置的量杆与 x^{μ} 处横向放置的量杆比较,则有如下结果

$$\left(1 - \frac{2GM}{r'}\right)^{-\frac{1}{2}} L' = L \tag{3.5.119}$$

即

$$L' \approx \left(1 - \frac{GM}{r'}\right)L \tag{3.5.120}$$

又因横向放置的量杆与位置无关,因此,即使在同一点上,一个量杆沿横向放置时的长度 L 与它沿径向放置时的长度 L'之间也由方程(3.5.120)给出。

关于量杆的收缩效应,目前尚没有任何实验证据。

下面我们考虑牛顿引力有何变化。按牛顿理论,单位质点在空间一点受均质圆球的引力可表示为

$$\boldsymbol{F} = -\frac{GM}{r^3}\boldsymbol{r} = -\nabla\left(-\frac{GM}{r}\right) \tag{3.5.121}$$

其中

$$\varphi = -\frac{GM}{r} \tag{3.5.122}$$

是牛顿引力位,$\boldsymbol{r}$ 是由坐标原点指至质点的向径(矢量)。

在广义相对论中,$g_{\mu\nu}$具有引力位特征,而 $\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}$具有引力特征。按 Schwarzschild 度规,对引力位起作用的是 g_{00}和 g_{ii}($g_{\mu\nu}$的其他分量均为零)。对引力起作用的分量有 13 个,由方程(3.5.9)给出。如果选定一个固定方向 $\theta = \pi/2$,则有 10 个分量起作用,这只要考察一下由方程(3.5.9)给出的 13 个分量即知(最后 3 个分量为零)。

下面考虑粒子沿径向运动的情形(即自由下落运动)。粒子的运动方程由式(3.5.39b)给出,即

$$0 = \frac{d^2 r}{dp^2} + \frac{A'}{2A}\left(\frac{dr}{dp}\right)^2 - \frac{r}{A}\left(\frac{d\theta}{dp}\right)^2 - r\frac{\sin^2\theta}{A}\left(\frac{d\lambda}{dp}\right)^2 + \frac{B'}{2A}\left(\frac{dt}{dp}\right)^2 \tag{3.5.123}$$

由于是径向运动，θ 和 λ 为常数，故上述方程可写成

$$\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}p^2}+\frac{A'}{2A}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}p}\right)^2+\frac{B'}{2A}\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}p}\right)^2=0 \tag{3.5.124}$$

或以时间 t 为参数，可改写成

$$\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2}+\frac{A'}{2A}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2+\frac{B'}{2A}=0 \tag{3.5.125}$$

在上面方程的两边作用 $2A$，注意到 $A'=\mathrm{d}A/\mathrm{d}r$ 和 $B'=\mathrm{d}B/\mathrm{d}r$，即可完成下述推演

$$2A\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)+\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\bigg/\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[A\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2+B\right]=0$$

$$A\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2+B=C_1 \tag{3.5.126}$$

其中 C_1 是积分常数。

由上述方程中的最后一个，得

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\pm\left(\frac{C_1-B}{A}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.5.127}$$

按通常的约定（r 由球心指向外），方程(3.5.127)的右端取负号（因为粒子自由下落随着时间的增加，r 单调减小），即

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=-\left(\frac{C_1-B}{A}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.5.128}$$

积分上式，得

$$t-t_0=-\int_{r_0}^{r}\left(\frac{C_1-B}{A}\right)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}r \tag{3.5.129}$$

其中 t_0 对应于 r_0。

假定 $r=r_0$ 时 $t_0=0$，这时，粒子的初速度为零。由方程(3.5.128)得

$$C_1=B(r_0) \tag{3.5.130}$$

方程(3.5.129)给出了粒子随时间的变化规律。但就目前讨论的问题来说，没有必要求解方程(3.5.129)。如果将 $\mathrm{d}^2r/\mathrm{d}t^2$ 解释为

粒子的下落加速度，那么，根据等效原理，粒子必定受到一引力作用，其大小由下式确定（见方程(3.5.125)）

$$\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{A'}{2A}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 - \frac{B'}{2A} = f_G \qquad (3.5.131)$$

将方程(3.5.128)、(3.5.130)代入上式，便得到粒子位于 r 处时所受到的引力（顾及方程(3.5.28)）：

$$\begin{aligned} f_G &= -\frac{A'}{2A}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 - \frac{B'}{2A} = -\frac{A'}{2A}\frac{B(r_0) - B(r)}{A(r)} - \frac{B'}{2A} \\ &= -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}\right]\left[-\frac{2GM}{r_0} + \frac{2GM}{r}\right] \\ &\quad - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \\ &= \frac{1}{2}\frac{2GM}{r^2}\left(-\frac{2GM}{r_0} + \frac{2GM}{r}\right) - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)\frac{2GM}{r^2} \\ &= -\frac{GM}{r^2} + \frac{2GM}{r^2}\frac{GM}{r} + 2\frac{GM}{r^2}\left(\frac{GM}{r} - \frac{GM}{r_0}\right) \end{aligned} \qquad (3.5.132)$$

取粒子在开始运动时的状态，则

$$f_G = -\frac{GM}{r^2} + \frac{2GM}{r^2}\frac{GM}{r} \qquad (3.5.133)$$

或写成矢量形式

$$\boldsymbol{f}_G = -\frac{GM}{r^3}\boldsymbol{r} + \frac{2GM}{r}\frac{GM}{r^3}\boldsymbol{r} \qquad (3.5.134)$$

比较方程(3.5.134)与方程(3.5.121)可知，按广义相对论，在 r 处的引力比牛顿引力多出一项 $(2G^2M^2/r^4)\boldsymbol{r}$。确切地说，从数值上来看，$r$ 处的引力值，按广义相对论计算要比按牛顿理论计算小一个量 $2G^2M^2/r^3$。以地球表面为例，假定按牛顿理论计算，地球表面的重力加速度（忽略离心力）为

$$g_N = \frac{GM}{r^2} \approx 10\mathrm{m/s^2} = 10^3\mathrm{Gal} \qquad (3.5.135)$$

那么，按广义相对论计算（注意 GM/r 应采用光速单位，即将国际单位除以光速 c 的平方），应该是

$$g_G = 10^3\mathrm{Gal} - \frac{2GM}{r} \times 10^3\mathrm{Gal}$$

$$= 10^3\text{Gal} - 2 \times \left(\frac{6}{9} \times 10^{-9}\right) \times 10^3\text{Gal}$$

$$= 10^3\text{Gal} - 1.3 \times 10^{-6}\text{Gal} \tag{3.5.136}$$

可见,广义相对论与牛顿理论的差异在地球表面达到微伽级(1Gal = 10^6 μgal。这个量级超过了(大于)目前的观测精度量级。目前,超导重力仪的观测精度已达到几十到几个纳伽(即 10^{-9}Gal)量级(孙和平, 2004; GWR homepage, 2007)。

若估算广义相对论对重力场的影响,可按下式进行

$$g_G = g_N - 2\frac{GM}{R}g_N$$

$$\left|\frac{g_G - g_N}{g_N}\right| = \frac{2GM}{R} \approx 10^{-9} \tag{3.5.137}$$

因此,当精度要求高于 $10^{-9}g$(g 是牛顿重力加速度)时,需要考虑广义相对论影响,换言之,应该以广义相对论为基础进行计算求解。我们将在第 4 章详细讨论相对论重力测量。

3.5.7 粒子自旋的进动效应

我们考虑带有自旋的粒子(比如陀螺)在 Schwarzschild 度规场中的自旋的进动。在 3.3.3 节我们曾讨论了自由运动粒子的自旋 S_μ 在一般引力场中的运动方程

$$D_\tau S_\mu = 0 \tag{3.5.138}$$

其中 D_τ 是标量协变导数算子(简称协变导数算子)。在任意参考系 x^μ 中写成显式就是

$$\frac{dS_\mu}{d\tau} - \Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}\frac{dx^\nu}{d\tau}S_\sigma = 0 \tag{3.5.139}$$

满足条件(3.3.17),得

$$S_\mu \frac{dx^\mu}{d\tau} = 0 \tag{3.5.140}$$

如果取 x^μ 为地心准惯性球面坐标参考系($x^0 = t$, $x^1 = r$, $x^2 = \theta$, $x^3 = \lambda$),则仿射联络 $\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}$由方程(3.5.9)给出。将仿射联络 $\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}$在球对称引力场(参见 3.5.1 节)的具体值(3.5.9)代入方程(3.5.139),并

利用条件(3.5.140)，即可求得在地心准惯性球面坐标参考系中的自旋运动方程。

对于四维矢量 S_μ，我们感兴趣的是三个空间分量 $S_i(i=1,2,3)$。由方程(3.5.139)

$$\frac{\mathrm{d}S_i}{\mathrm{d}t}=\Gamma^{\sigma}{}_{i\nu}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}t}S_\sigma \qquad (3.5.141)$$

其中参量 τ 已换成了时间参数 t。由方程(3.5.140)，得

$$S_0=-S_i\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}=-S_iv^i \qquad (3.5.142)$$

将方程(3.5.142)代入方程(3.5.141)消去 S_0，得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}S_i}{\mathrm{d}t}&=\Gamma^{j}{}_{i\nu}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}t}S_j+\Gamma^{0}{}_{i\nu}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}t}(-S_kv^k)\\&=\Gamma^{j}{}_{i0}S_j+\Gamma^{j}{}_{ik}\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t}S_j-\Gamma^{0}{}_{i0}S_k\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t}-\Gamma^{0}{}_{ij}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t}S_k\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t}\end{aligned} \qquad (3.5.143)$$

由于 $\Gamma^0{}_{ij}=0$，$\Gamma^j{}_{i0}=0$(参见方程(3.5.9))，上边的方程简化为

$$\frac{\mathrm{d}S_i}{\mathrm{d}t}=\left(\Gamma^{j}{}_{ik}\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t}-\Gamma^{0}{}_{i0}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t}\right)S_j \qquad (3.5.144)$$

将 Schwarzschild 度规下的仿射联络(3.5.9)代入方程(3.5.144)，得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}S_1}{\mathrm{d}t}&=\left(\Gamma^{j}{}_{1k}\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t}-\Gamma^{0}{}_{10}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t}\right)S_j\\&=\Gamma^{r}{}_{1k}\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t}S_1+\Gamma^{\theta}{}_{1k}\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t}S_2+\Gamma^{\lambda}{}_{1k}\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t}S_3-\Gamma^{t}{}_{rt}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t}S_j\\&=\Gamma^{r}{}_{rr}\dot{r}S_1+\Gamma^{\theta}{}_{r\theta}\dot{\theta}S_2+\Gamma^{\lambda}{}_{r\lambda}\dot{\lambda}S_3-\Gamma^{t}{}_{rt}(\dot{r}S_1+\dot{\theta}S_2+\dot{\lambda}S_3)\\&=\frac{A'}{2A}\dot{r}S_1+\frac{1}{r}\dot{\theta}S_2+\frac{1}{r}\dot{\lambda}S_3-\frac{B'}{2B}(\dot{r}S_1+\dot{\theta}S_2+\dot{\lambda}S_3)\end{aligned} \qquad (3.5.145a)$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}S_2}{\mathrm{d}t}&=\left(\Gamma^{j}{}_{2k}\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t}-\Gamma^{0}{}_{20}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t}\right)S_j\\&=\Gamma^{r}{}_{2k}\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t}S_1+\Gamma^{\theta}{}_{2k}\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t}S_2+\Gamma^{\lambda}{}_{2k}\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t}S_3-\Gamma^{t}{}_{\theta t}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t}S_j\\&=-\frac{r}{A}\dot{\theta}S_1+\frac{1}{r}\dot{r}S_2+\cot\theta\,\dot{\lambda}S_3\end{aligned} \qquad (3.5.145b)$$

$$\frac{dS_3}{dt} = \left(\Gamma^j{}_{3k}\frac{dx^k}{dt} - \Gamma^0{}_{30}\frac{dx^j}{dt}\right)S_j$$

$$= -\frac{r\sin^2\theta}{A}\dot{\lambda}S_1 - \sin\theta\cos\theta\,\dot{\lambda}S_2 + \left(\frac{1}{r}\dot{r} + \cot\theta\,\dot{\theta}\right)S_3$$

(3.5.145c)

为简单起见,假定自旋粒子的运动轨迹是半径为 r 的圆,并且限定在 $\theta = \pi/2$ 的轨道上。这时,$\dot{r}$ 和 $\dot{\theta}$ 均为零。就这里所讨论的问题来说,上述假定不会带来实质性的影响。于是,方程(3.5.145)可写成

$$\frac{dS_1}{dt} = \frac{1}{r}\dot{\lambda}S_3 - \frac{B'}{2B}\dot{\lambda}S_3 \quad (3.5.146a)$$

$$\frac{dS_2}{dt} = 0 \quad (3.5.146b)$$

$$\frac{dS_3}{dt} = -\frac{r}{A}\dot{\lambda}S_1 \quad (3.5.146c)$$

按 Schwarzschild 度规

$$B = 1 - \frac{2GM}{r}, \quad A = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} \quad (3.5.147)$$

因此,方程(3.5.146)可写成(一阶近似结果)

$$\frac{dS_1}{dt} = \frac{1}{r^2}(r\dot{\lambda})S_3 - \frac{\frac{2GM}{r^2}}{2\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)}\dot{\lambda}S_3$$

$$= \left[\frac{1}{r^2}(r\dot{\lambda}) - \frac{GM}{r^3}(r\dot{\lambda})\right]S_3 \quad (3.5.148)$$

即

$$\frac{dS_1}{dt} = \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{GM}{r}\right)(r\dot{\lambda})S_3 \quad (3.5.149a)$$

$$\frac{dS_2}{dt} = 0 \quad (3.5.149b)$$

$$\frac{dS_3}{dt} = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)(r\dot{\lambda})S_1 \quad (3.5.149c)$$

方程(3.5.149)给出了粒子的自旋在地心准惯性参考系中的进动方程。但在实际应用中,我们往往是在随粒子一起运动的参考系(称之为共动参考系)中考察粒子的自旋运动。共动参考系的原点位于粒子附近,以遥远的恒星定向。这里需要指出,按广义相对性原理,在随粒子一起运动的局部惯性系中,粒子的自旋不发生进动。否则,将违背广义相对性原理。因为按广义相对性原理,在局部惯性系中,度规是闵可夫斯基度规 $\eta_{\mu\nu}$,由此构造的 $\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}=0$,不存在任何引力效应使粒子的自旋发生进动。

我们知道, Schwarzschild 度规(3.5.29)或(3.5.30)是在地心准惯性球面坐标系中给出的结果。在共动笛卡尔坐标系中, Schwarzschild 度规由下式给出(Ohanian,1976)

$$g_{\mu\nu}=\begin{bmatrix} -(1-2GM/r) & +4vGM/r & 0 & 0 \\ +4vGM/r & +(1+2GM/r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1+2GM/r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1+2GM/r) \end{bmatrix} \tag{3.5.150}$$

或写成

$$\mathrm{d}\tau^2=\left(1-\frac{2GM}{r}\right)\mathrm{d}t^2-\frac{8vGM}{r}\mathrm{d}t\mathrm{d}x-\left(1+\frac{2GM}{r}\right)(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2) \tag{3.5.151}$$

其中

$$v=\sqrt{\frac{GM}{r}} \tag{3.5.152}$$

利用仿射联络与度规张量的关系

$$\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}=\frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}\left(\frac{\partial g_{\sigma\mu}}{\partial x^{\nu}}+\frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^{\mu}}-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}}\right) \tag{3.5.153}$$

可计算出 $\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}$。在计算 $\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}$ 之前,我们先考察方程(3.5.138)。这个方程在任意坐标系中都成立。将指标 μ 提升,则有

$$D_{\tau}S^{\mu}=0 \tag{3.5.154}$$

或写成

$$D_{\tau}S^{\lambda}\equiv\frac{\mathrm{d}S^{\lambda}}{\mathrm{d}t}+\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}t}S^{\nu}=0 \tag{3.5.155}$$

同样，我们感兴趣的是三个空间分量 S^i，于是

$$\frac{dS^i}{dt} = -\Gamma^i{}_{\mu j}\frac{dx^\mu}{dt}S^j - \Gamma^i{}_{\mu 0}\frac{dx^\mu}{dt}S^0 \qquad (3.5.156)$$

对于共动坐标系 x^μ，粒子所在的坐标为 $(t,0,0,0)$，因此有

$$\frac{dx^\mu}{dt} = (1,0,0,0) \qquad (3.5.157)$$

或

$$\frac{dx_\lambda}{dt} = (1,0,0,0) \qquad (3.5.158)$$

由方程(3.5.158)，得

$$S^\lambda \frac{dx_\lambda}{dt} = S^0 \qquad (3.5.159)$$

但 S_μ 必须满足谐和条件(3.5.140)

$$S_\mu \frac{dx^\mu}{dt} = 0 \qquad (3.5.160)$$

或写成

$$S^\lambda \frac{dx_\lambda}{dt} = 0 \qquad (3.5.161)$$

由方程(3.5.159)和方程(3.5.161)，得

$$S^0 = 0 \qquad (3.5.162)$$

将方程(3.5.157)和方程(3.5.162)代入方程(3.5.156)，得

$$\frac{dS^i}{dt} = -\Gamma^i{}_{j\mu}\frac{dx^\mu}{dt}S^j = -\Gamma^i{}_{j0}S^j \qquad (3.5.163)$$

由方程(3.5.163)可以看出，我们只需要计算 $\Gamma^i{}_{j0}$。基于由方程(3.5.150)给出的协变度规张量 $g_{\mu\nu}$ 可求出逆变度规张量 $g^{\mu\nu}$，再联合方程(3.5.153)即可算出所需要的 $\Gamma^i{}_{j0}$：

$$\Gamma^1{}_{30} = -\Gamma^3{}_{10} = -2v\frac{GM}{r^2} + \frac{1}{2}v\frac{GM}{r^2} = -\frac{3}{2}v\frac{GM}{r^2} \qquad (3.5.164a)$$

$$\Gamma^i{}_{j0} = 0，\text{其他情形} \qquad (3.5.164b)$$

将方程(3.5.164)代入方程(3.5.163)，得

$$\frac{\mathrm{d}S^1}{\mathrm{d}t} = -\Gamma^1{}_{j0}S^j = \frac{3}{2}v\frac{GM}{r^2}S^3 \tag{3.5.165a}$$

$$\frac{\mathrm{d}S^2}{\mathrm{d}t} = -\Gamma^2{}_{j0}S^j = 0 \tag{3.5.165b}$$

$$\frac{\mathrm{d}S^3}{\mathrm{d}t} = -\Gamma^3{}_{j0}S^j = -\frac{3}{2}v\frac{GM}{r^2}S^1 \tag{3.5.165c}$$

或写成矢量形式

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\mathrm{d}t} = \frac{3}{2}\frac{GM}{r^3}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v})\times\boldsymbol{S} \tag{3.5.166}$$

方程(3.5.166)表明，自旋 $\boldsymbol{S}$ 以角速度

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{3}{2}\frac{GM}{r^3}\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v} \tag{3.5.167}$$

绕着 $\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}$ 方向(即轨道面的法线方向)进动。这一进动称为测地进动(De Sitter,1916)。测地进动与粒子本身自旋的大小无关。根据这一特性，对于一个惯性导航陀螺来说，不论它的旋转速度有多快，它总存在一个恒定的进动效应，由方程(3.5.167)给出，参见图 3.5.3。比如，对于一个离开地面高度为 800km 的绕地球作自由环行的陀螺来说，如果它的自旋轴位于轨道平面内，那么，陀螺的自旋将以每年约 7″(角秒)的速率进动。对于沿径向运动的陀螺，不存在测地进动，因为在此情形下，$\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}=0$。

自旋粒子在引力场中发生进动，类似于电磁学中的 Thomas 进动。因此，测地进动也称为引力 Thomas 进动效应。测地进动最初由 De Sitter(1916)导出，用于描述地月系统绕太阳的旋转效应。Thirring and Lense(1918)曾详细研究了一个天体在中心旋转体引力场中的进动问题。从本质上来看，由于进动效应的存在，引力场不仅具有引力(吸引)效应，而且还具有引力磁(偏转)效应。由于自旋进动效应的存在，一个自由降落的参考系要能成为惯性系，它必须同时相对遥远恒星作缓慢进动，其进动速率取决于中心天体。

自旋粒子的进动效应在研究地球自转轴运动时有重要应用(Chao et al.,1993)。若把地球看作带有自旋的粒子在太阳引力场中运动，则可以推出，地球自转轴每百年按逆时针方向进动 1.9″(Chao et al.,1993)。

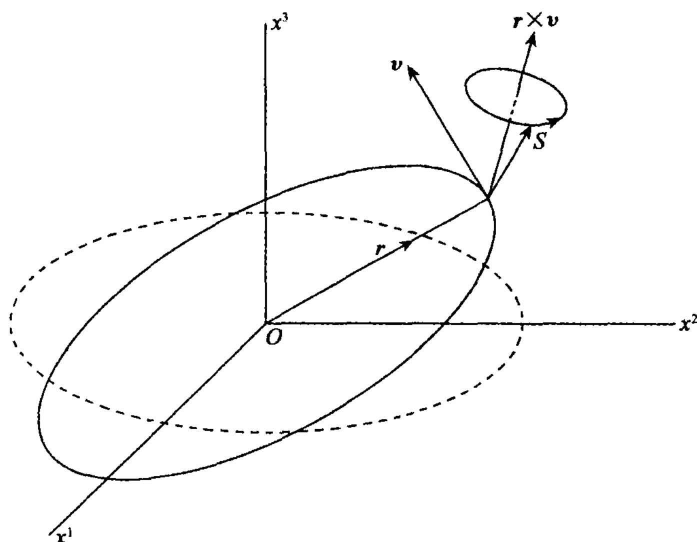


图 3.5.3 在一般坐标系 $O-x^0x^1x^2x^3$ 中考察，自旋为 S 的粒子在引力场中以速度 $\boldsymbol{v}$ "自由下落"，这时，粒子的自旋 S 绕着 $\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}$ 方向(逆时针)进动

3.5.8 光传播的时间延迟效应

我们在 3.5.4 节讨论了光线掠过中心天体(如太阳)的偏转。下面我们讨论光线从 P 点行进到 Q 点所需要的时间。选定以中心天体的中心为原点的准惯性球面坐标系。P 和 Q 的空间坐标分别记为$(r_1,\pi/2,\lambda_1)$和$(r_2,\pi/2,\lambda_2)$，即光线处于赤道平面内。光线从 P 传至 Q(假定 P 与 Q 相距很远)所花费的时间由光子的轨道方程(见方程(3.5.53))

$$\frac{A}{B^2}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2+\frac{J^2}{r^2}-\frac{1}{B}=-E \tag{3.5.168}$$

决定。对于光子轨道，$\mathrm{d}\tau=0$，因此，由方程(3.5.51)或方程(3.5.54)得

$$E=0 \tag{3.5.169}$$

在光子最接近中心天体的位置 $r=r_0$(注意,过了这个位置,光子离开中心天体的距离又越来越远了),轨道取极值,即有

$$\left.\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right|_{r=r_0}=0 \tag{3.5.170}$$

将方程(3.5.169)和方程(3.5.170)代入方程(3.5.168)得

$$\frac{J^2}{r_0^2}=\frac{1}{B(r_0)}\equiv\frac{1}{B_0} \tag{3.5.171}$$

即

$$J^2=\frac{r_0^2}{B_0} \tag{3.5.172}$$

将方程(3.5.172)和方程(3.5.169)代入方程(3.5.168),便得到光子的运动方程

$$\frac{A}{B^2}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{r_0}{r}\right)^2\frac{1}{B_0}-\frac{1}{B}=0 \tag{3.5.173}$$

因此,光子从 r_0 传播到 r 或从 r 传播到 r_0 所需的时间可通过对方程(3.5.173)积分得到

$$t(r,r_0)=t(r_0,r)=\int_{r_0}^{r}\left[\frac{\dfrac{A}{B}}{1-\left(\dfrac{r_0}{r}\right)^2\dfrac{B}{B_0}}\right]^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}r \tag{3.5.174}$$

按 Schwarzschild 度规

$$B=1-\frac{2GM}{r},\quad B_0=1-\frac{2GM}{r_0}$$

$$A=\left(1-\frac{2GM}{r}\right)^{-1}\approx 1+\frac{2GM}{r}$$

$$(A/B)^{\frac{1}{2}}=\left(1+\frac{2GM}{r}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{2GM}{r}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$=\left(1+\frac{GM}{r}\right)\left(1+\frac{GM}{r}\right)\approx 1+\frac{2GM}{r}$$

$$\left[1-\left(\frac{r_0}{r}\right)^2\frac{B}{B_0}\right]^{-\frac{1}{2}}=\left[1-\left(\frac{r_0}{r}\right)^2\left(1-\frac{2GM}{r}+\frac{2GM}{r_0}\right)\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$
= \left[1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^2\left(\frac{2GM}{r_0} - \frac{2GM}{r}\right)\right]^{-\frac{1}{2}}
$$

$$
= \left[1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}\left\{1 + \frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^2\right]^{-1}\left(\frac{r_0}{r}\right)^2\left(\frac{2GM}{r_0} - \frac{2GM}{r}\right)\right\} \tag{3.5.175}
$$

将上列诸式代入方程(3.5.174),得

$$
\begin{aligned}
t(r, r_0) &= \int_{r_0}^{r}\left\{\left[1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^2\right]^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{r_0}{r}\right)^2\right. \\
&\quad \left.\left(\frac{2GM}{r_0} - \frac{2GM}{r}\right) + \frac{2GM}{r}\left[1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}\right\}\mathrm{d}r \\
&= \int_{r_0}^{r}\left\{\left[1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}r_0\frac{2GM}{r}\frac{1}{r + r_0}\left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right. \\
&\quad \left. + \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{2GM}{r}\right\}\mathrm{d}r \\
&= \int_{r_0}^{r}\left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}r + \int_{r_0}^{r}\frac{GMr_0}{r(r + r_0)}\left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}r \\
&\quad + \int_{r_0}^{r}\frac{2GM}{r}\left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}r \\
&= \sqrt{r^2 - r_0^2} + GM\sqrt{\frac{r - r_0}{r + r_0}} + 2GM\ln\left(r + \sqrt{r^2 - r_0^2}\right)\Bigg|_{r_0}^{r} \\
&= \sqrt{r^2 - r_0^2} + GM\sqrt{\frac{r - r_0}{r + r_0}} + 2GM\ln\frac{r + \sqrt{r^2 - r_0^2}}{r_0}
\end{aligned} \tag{3.5.176}
$$

在方程(3.5.176)的最后一个等式的右边，$\sqrt{r^2 - r_0^2}$表示当光线以真空中光速沿直线传播时所花费的时间(注意光速单位制)，最后两项则表示由于引力效应而引起的光传播的时间延迟。这个公式在甚长基线干涉测量(VLBI)中有重要应用。

在方程(3.5.176)中分别用 r_1 和 r_2 替换 r,则得到光子从 P 点

出发经由 $r=r_0$ 到达 Q 点所花费的总时间

$$t(r_1,r_2)=t(r_1,r_0)+t(r_0,r_2) \tag{3.5.177}$$

3.6 后牛顿近似及应用

由于爱因斯坦场方程的非线性,对于一般引力场来说,严格求解(即求出 $g_{\mu\nu}$)是不可能的。对于特殊的场(比如球对称静态引力场),尽管可以求出严格解(如 Schwarzschild 度规),但在实际应用中受到很大的限制。以地球为例,它并不是均质圆球,地球引力场不仅不是球对称的,而且也不是静态的。特别是以大地测量为目的,Schwarzschild 解往往不能满足精度要求。为此,对于一般弱引力场(太阳系中的引力场都是弱场),在 Schwarzschild 解不适用时,我们需要寻求爱因斯坦场方程的近似解,其近似程度取决于实际应用中所提出的精度要求。就目前的观测精度来看,只要考虑到二阶项就够了。一阶项是牛顿理论,二阶项是对牛顿理论的修正项。一般地,在求解场方程时,如果根据精度需要只考虑到第 N 阶次,就称为 N 阶后牛顿近似。后牛顿近似绝非在牛顿理论的基础上加上一些改正,实则广义相对论框架下的近似处理,如果需要,可以达到任意的逼近程度。因此,后牛顿近似实际上是广义相对论在处理实际问题时所采用的计算手段。由于历史原因,我们仍然采用后牛顿近似这一提法,尽管这种提法有时会引起误解。

3.6.1 后牛顿近似

以下的后牛顿近似法基于 Weinberg(1972)。按牛顿理论,引力典型值为

$$\frac{GM}{r^2} \tag{3.6.1}$$

这个值相当于单位质量的质点在 r 处的轨道速度的平方(即 $v^2=GM/r$)除以 r。因此,我们的近似取至 GMv^2/r^2 或 v^4/r(注意:采用光速单位, $c=1$, v 是小量)。

首先让我们考察质点的运动方程

$$\frac{d^2x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \tag{3.6.2}$$

由此可算出加速度

$$\begin{aligned}\frac{d^2x^i}{dt^2} &= \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^{-1}\frac{d}{d\tau}\left[\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^{-1}\frac{dx^i}{d\tau}\right]\\ &= \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^{-2}\frac{d^2x^i}{d\tau^2} - \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^{-3}\frac{d^2t}{d\tau^2}\frac{dx^i}{d\tau}\\ &= -\Gamma^i{}_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{dt} + \Gamma^0{}_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{dt}\frac{dx^i}{dt}\\ &= -\Gamma^i{}_{00} - 2\Gamma^i{}_{0j}\frac{dx^j}{dt} - \Gamma^i{}_{jk}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt}\\ &\quad + \left[\Gamma^0{}_{00} + 2\Gamma^0{}_{0j}\frac{dx^j}{dt} + \Gamma^0{}_{jk}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt}\right]\frac{dx^i}{dt}\end{aligned} \tag{3.6.3}$$

若希望给出牛顿理论,则加速度准确到 v^2/r 即可。因此,我们的目标是准确到 v^4/r。由方程(3.6.3)可知,$\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$的分量应分别具有如下近似程度

$$\begin{aligned}&\Gamma^i{}_{00} \sim v^4/r, \quad \Gamma^i{}_{0j} \sim v^3/r, \quad \Gamma^i{}_{jk} \sim v^2/r\\ &\Gamma^0{}_{00} \sim v^3/r, \quad \Gamma^0{}_{0j} \sim v^2/r, \quad \Gamma^0{}_{jk} \sim v/r\end{aligned} \tag{3.6.4}$$

考虑到弱场度规 $g_{\mu\nu}$与闵可夫斯基度规 $\eta_{\mu\nu}$极为接近,可将 $g_{\mu\nu}$写成

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \tag{3.6.5}$$

其中 $h_{\mu\nu}$是 v^2 的高阶幂次项。具体地说,$g_{\mu\nu}$可写成

$$g_{00} = -1 + \overset{2}{g}_{00} + \overset{4}{g}_{00} + \cdots \tag{3.6.6a}$$

$$g_{ij} = \delta_{ij} + \overset{2}{g}_{ij} + \overset{4}{g}_{ij} + \cdots \tag{3.6.6b}$$

$$g_{i0} = \overset{3}{g}_{i0} + \overset{5}{g}_{i0} + \cdots \tag{3.6.6c}$$

这里,$\overset{N}{g}_{\mu\nu}$表示 $g_{\mu\nu}$中量级为 v^N 的项。g_{i0}在时间反演之下必须变号(因为 g_{i0}对应于 $dt dx^i$, $t\to -t$ 时 $dt dx^i \to -dt dx^i$,但 $d\tau^2$ 要求不变。因此,$t\to -t$ 时 g_{i0}必须反号),这表明 g_{i0}必须由 v 的奇次项构成。又因 $g_{\mu\nu}$非常接近于 $\eta_{\mu\nu}$,可以预期 $h_{\mu\nu}$由 v 的二次幂以及二次幂以上的项构成,因此有方程(3.6.6c)。

根据 $g_{\mu\nu}$的逆的定义

$$g^{\lambda\nu}g_{\mu\nu} = \delta^\lambda{}_\mu \tag{3.6.7}$$

可以预期如下展开式

$$g^{00}=-1+\overset{2}{g}_{00}+\overset{4}{g}_{00}+\cdots \tag{3.6.8a}$$

$$g^{ij}=\delta^{ij}+\overset{2}{g}_{ij}+\overset{4}{g}_{ij}+\cdots \tag{3.6.8b}$$

$$g^{i0}=\overset{3}{g}_{i0}+\overset{5}{g}_{i0}+\cdots \tag{3.6.8c}$$

由方程(3.6.6)～(3.6.8)可以确定如下关系

$$\overset{2}{g}_{00}=-\overset{2}{g}_{00},\quad \overset{4}{g}_{00}=-\overset{4}{g}_{00},\cdots \tag{3.6.9a}$$

$$\overset{2}{g}_{ij}=-\overset{2}{g}_{ij},\quad \overset{4}{g}_{ij}=-\overset{4}{g}_{ij},\cdots \tag{3.6.9b}$$

$$\overset{3}{g}_{ij}=\overset{3}{g}_{i0},\quad \overset{5}{g}_{i0}=\overset{5}{g}_{i0},\cdots \tag{3.6.9c}$$

仿射联络由下式确定

$$\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}=\frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}\left(\frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^{\mu}}+\frac{\partial g_{\sigma\mu}}{\partial x^{\nu}}-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}}\right) \tag{3.6.10}$$

考虑到 $\partial/\partial x^i$ 具有量级 $1/r$，$\partial/\partial t$ 具有量级 v/r，将方程(3.6.6)和(3.6.8)代入方程(3.6.10)后，有

$$\begin{aligned}
\Gamma^{i}{}_{00}&=\overset{2}{\Gamma}{}^{i}{}_{00}+\overset{4}{\Gamma}{}^{i}{}_{00}+\cdots\\
\Gamma^{i}{}_{jk}&=\overset{2}{\Gamma}{}^{i}{}_{jk}+\overset{4}{\Gamma}{}^{i}{}_{jk}+\cdots\\
\Gamma^{0}{}_{0i}&=\overset{2}{\Gamma}{}^{0}{}_{0i}+\overset{4}{\Gamma}{}^{0}{}_{0i}+\cdots\\
\Gamma^{i}{}_{0j}&=\overset{3}{\Gamma}{}^{i}{}_{0j}+\overset{5}{\Gamma}{}^{i}{}_{0j}+\cdots\\
\Gamma^{0}{}_{00}&=\overset{3}{\Gamma}{}^{0}{}_{00}+\overset{5}{\Gamma}{}^{0}{}_{00}+\cdots\\
\Gamma^{0}{}_{ij}&=\overset{3}{\Gamma}{}^{0}{}_{ij}+\overset{5}{\Gamma}{}^{0}{}_{ij}+\cdots
\end{aligned} \tag{3.6.11}$$

其中符号 $\overset{N}{\Gamma}{}^{\lambda}{}_{\mu\nu}$表示 $\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}$中量级为 v^N/r 的项。将 $\overset{N}{\Gamma}{}^{\lambda}{}_{\mu\nu}$用 $g_{\mu\nu}$和 $g^{\mu\nu}$表示出来，就是

$$\overset{2}{\Gamma}{}^{i}{}_{00}=-\frac{1}{2}\frac{\partial\overset{2}{g}_{00}}{\partial x_i}$$

$$\overset{4}{\Gamma}{}^{i}{}_{00}=-\frac{1}{2}\frac{\partial\overset{4}{g}_{00}}{\partial x_i}+\delta^{ik}\frac{\partial\overset{4}{g}_{k0}}{\partial t}+\frac{1}{2}\overset{2}{g}{}^{ij}\frac{\partial\overset{2}{g}_{00}}{\partial x^j}$$

$$\overset{2}{\Gamma}{}^{i}{}_{jk}=\frac{1}{2}\left(\delta^{il}\frac{\partial\overset{2}{g}_{lj}}{\partial x^k}+\delta^{il}\frac{\partial\overset{2}{g}_{lk}}{\partial x^j}-\frac{\partial\overset{2}{g}_{jk}}{\partial x_i}\right)$$

$$\overset{3}{\Gamma}{}^{i}{}_{0j} = \frac{1}{2}\left(\delta^{il}\frac{\partial \overset{3}{g}_{l0}}{\partial x^{j}} + \delta^{ik}\frac{\partial \overset{2}{g}_{kj}}{\partial t} - \frac{\partial \overset{3}{g}_{j0}}{\partial x_{i}}\right)$$

$$\overset{3}{\Gamma}{}^{0}{}_{00} = -\frac{1}{2}\frac{\partial \overset{2}{g}_{00}}{\partial t}$$

$$\overset{2}{\Gamma}{}^{0}{}_{i0} = -\frac{1}{2}\frac{\partial \overset{2}{g}_{00}}{\partial x^{i}}$$

$$\overset{1}{\Gamma}{}^{0}{}_{ij} = 0 \tag{3.6.12}$$

其他阶次的项 $\overset{N}{\Gamma}{}^{\lambda}{}_{\mu\nu}$ 以后基本上用不到，这里不再列出。需要时，可直接按方程(3.6.10)和(3.6.11)求出。

根据黎曼张量 $R_{\mu\nu\alpha}{}^{\beta}$ 与仿射联络的关系式(3.2.156)

$$R_{\mu\nu\alpha}{}^{\beta} = \frac{\partial \Gamma^{\beta}{}_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial \Gamma^{\beta}{}_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu}} + \Gamma^{\sigma}{}_{\mu\alpha}\Gamma^{\beta}{}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\sigma}{}_{\nu\alpha}\Gamma^{\beta}{}_{\mu\sigma} \tag{3.6.13}$$

Ricci 张量 $R_{\mu\alpha}$(缩并 $R_{\mu\nu\alpha}{}^{\beta}$ 的 β 和 ν 指标)可写成

$$R_{\mu\alpha} = \frac{\partial \Gamma^{\nu}{}_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial \Gamma^{\nu}{}_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu}} + \Gamma^{\sigma}{}_{\mu\alpha}\Gamma^{\nu}{}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\sigma}{}_{\nu\alpha}\Gamma^{\nu}{}_{\mu\sigma} \tag{3.6.14}$$

根据方程(3.6.11)，$R_{\mu\alpha}$具有如下展开式

$$R_{00} = \overset{2}{R}_{00} + \overset{4}{R}_{00} + \cdots$$

$$R_{i0} = \overset{3}{R}_{i0} + \overset{5}{R}_{i0} + \cdots$$

$$R_{ij} = \overset{2}{R}_{ij} + \overset{4}{R}_{ij} + \cdots \tag{3.6.15}$$

其中 $\overset{N}{R}_{\mu\alpha}$表示 $R_{\mu\alpha}$中量级为 v^{N}/r^{2} 的项。将方程(3.6.11)代入上式，得

$$\overset{2}{R}_{00} = \frac{\partial \overset{2}{\Gamma}{}^{i}{}_{00}}{\partial x^{i}}$$

$$\overset{4}{R}_{00} = -\frac{\partial \overset{3}{\Gamma}{}^{i}{}_{0i}}{\partial t} + \frac{\partial \overset{4}{\Gamma}{}^{i}{}_{00}}{\partial x^{i}} - \overset{2}{\Gamma}{}^{0}{}_{0i}\overset{2}{\Gamma}{}^{i}{}_{00} + \overset{2}{\Gamma}{}^{i}{}_{00}\overset{2}{\Gamma}{}^{j}{}_{ij}$$

$$\overset{3}{R}_{i0} = -\frac{\partial \overset{2}{\Gamma}{}^{j}{}_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial \overset{3}{\Gamma}{}^{j}{}_{0i}}{\partial x^{j}}$$

$$\overset{2}{R}_{ij} = -\frac{\partial\overset{2}{\Gamma}{}^0{}_{i0}}{\partial x^j} - \frac{\partial\overset{2}{\Gamma}{}^k{}_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial\overset{2}{\Gamma}{}^k{}_{ij}}{\partial x^k} \tag{3.6.16}$$

其他项以后不需要。若用 $g_{\mu\nu}$和 $g^{\mu\nu}$表示 $R_{\mu\nu}$，将方程(3.6.12)代入方程(3.6.16)，得

$$\overset{2}{R}_{00} = -\frac{1}{2}\Delta\overset{2}{g}_{00} \tag{3.6.17a}$$

$$\overset{4}{R}_{00} = -\frac{1}{2}\delta^{mn}\frac{\partial^2\overset{2}{g}_{mn}}{\partial t^2} + \frac{\partial^2\overset{3}{g}_{i0}}{\partial t\partial x_i} - \frac{1}{2}\Delta\overset{4}{g}_{00} + \frac{1}{2}\overset{2}{g}_{ij}\frac{\partial^2\overset{2}{g}_{00}}{\partial x_i\partial x_j} + \frac{1}{2}\frac{\partial\overset{2}{g}_{ij}}{\partial x_j}\frac{\partial\overset{2}{g}_{00}}{\partial x_i} - \frac{1}{4}\frac{\partial\overset{2}{g}_{00}}{\partial x_i}\frac{\partial\overset{2}{g}_{00}}{\partial x^i} - \frac{1}{4}\frac{\partial\overset{2}{g}_{00}}{\partial x_i}\frac{\delta^{mn}\partial\overset{2}{g}_{mn}}{\partial x^i} \tag{3.6.17b}$$

$$\overset{3}{R}_{i0} = -\frac{1}{2}\delta^{mn}\frac{\partial^2\overset{2}{g}_{mn}}{\partial t\partial x^i} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\overset{3}{g}_{j0}}{\partial x^i\partial x_j} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\overset{2}{g}_{ij}}{\partial t\partial x_j} - \frac{1}{2}\Delta\overset{3}{g}_{i0} \tag{3.6.17c}$$

$$\overset{2}{R}_{ij} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2\overset{2}{g}_{00}}{\partial x^i\partial x^j} - \frac{1}{2}\delta^{mn}\frac{\partial^2\overset{2}{g}_{mn}}{\partial x^i\partial x^j} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\overset{2}{g}_{ik}}{\partial x_k\partial x^j} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\overset{2}{g}_{kj}}{\partial x_k\partial x^i} - \frac{1}{2}\Delta\overset{2}{g}_{ij} \tag{3.6.17d}$$

其中 Δ 是拉普拉斯算子。

利用谐和坐标条件(3.4.24)

$$g^{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} = 0 \tag{3.6.18}$$

可简化 $R_{\mu\nu}$的表达式。根据方程(3.6.9)、(3.6.10)和方程(3.6.12)，在方程(3.4.24)中令 $\lambda=0$，并取三阶项为零，则有

$$0 = \frac{1}{2}\frac{\partial\overset{2}{g}_{00}}{\partial t} - \frac{\partial\overset{3}{g}_{0i}}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\delta^{mn}\frac{\partial\overset{2}{g}_{mn}}{\partial t} \tag{3.6.19}$$

在方程(3.4.24)中令 $\lambda=i$，取二阶项为零，则有

$$0 = \frac{1}{2}\frac{\partial\overset{2}{g}_{00}}{\partial x_i} + \delta^{ik}\frac{\partial\overset{2}{g}_{kj}}{\partial x_j} - \frac{1}{2}\delta^{mn}\frac{\partial\overset{2}{g}_{mn}}{\partial x_i} \tag{3.6.20}$$

方程(3.6.19)和方程(3.6.20)的证明如下。

方程(3.6.19)的证明：由方程(3.4.24)，令 $\lambda=0$，取三阶项为零，则有

$$g^{\mu\nu}\frac{1}{2}g^{0\sigma}\left(\frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^{\mu}}+\frac{\partial g_{\sigma\mu}}{\partial x^{\nu}}-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}}\right)=0 \qquad (3.6.21)$$

由于上式括号中的阶次最低为 2,故有(基于方程(3.6.6)、(3.6.8))

$$0=g^{\mu\nu}g^{00}\left(\frac{\partial g_{0\nu}}{\partial x^{\mu}}+\frac{\partial g_{0\mu}}{\partial x^{\nu}}-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial t}\right)$$

$$0=g^{0\nu}\left(\frac{\partial g_{0\nu}}{\partial t}+\frac{\partial g_{00}}{\partial x^{\nu}}-\frac{\partial g_{0\nu}}{\partial t}\right)+g^{i\nu}\left(\frac{\partial g_{0\nu}}{\partial x^{i}}+\frac{\partial g_{0i}}{\partial x^{\nu}}-\frac{\partial g_{i\nu}}{\partial t}\right)$$

$$0=g^{00}\frac{\partial g_{00}}{\partial t}+g^{i0}\left(\frac{\partial g_{00}}{\partial x^{i}}+\frac{\partial g_{0i}}{\partial x^{0}}-\frac{\partial g_{i0}}{\partial t}\right)+g^{ij}\left(\frac{\partial g_{0j}}{\partial x^{i}}+\frac{\partial g_{0i}}{\partial x^{j}}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial t}\right)$$

$$0=g^{00}\frac{\partial g_{00}}{\partial t}+\delta^{ij}\left(\frac{\partial g_{0j}}{\partial x^{i}}+\frac{\partial g_{0i}}{\partial x^{j}}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial t}\right)$$

$$0=-\frac{\partial \overset{2}{g}_{00}}{\partial t}+2\frac{\partial \overset{3}{g}_{0i}}{\partial x_{i}}-\delta^{ij}\frac{\partial \overset{2}{g}_{ij}}{\partial t} \qquad (3.6.22)$$

因此

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \overset{2}{g}_{00}}{\partial t}-\frac{\partial \overset{3}{g}_{0i}}{\partial x_{i}}+\frac{1}{2}\delta^{mn}\frac{\partial \overset{2}{g}_{mn}}{\partial t}=0 \qquad (3.6.23)$$

此即方程(3.6.19)。

方程(3.6.20)的证明:由方程(3.4.24),令 $\lambda=i$,取二阶项为零,则有

$$g^{\mu\nu}\frac{1}{2}g^{i\sigma}\left(\frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^{\mu}}+\frac{\partial g_{\sigma\mu}}{\partial x^{\nu}}-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}}\right)=0 \qquad (3.6.24)$$

由于上式括号中的阶次最低为 2,类似于前面的推导过程,有(基于方程(3.6.6)、(3.6.8))

$$0=g^{\mu\nu}\delta^{ij}\left(\frac{\partial g_{j\nu}}{\partial x^{\mu}}+\frac{\partial g_{j\mu}}{\partial x^{\nu}}-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{j}}\right)$$

$$0=-\delta^{ij}\left(\frac{\partial g_{j0}}{\partial x^{0}}+\frac{\partial g_{j0}}{\partial x^{0}}-\frac{\partial g_{00}}{\partial x^{j}}\right)+\delta^{kl}\delta^{ij}\left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^{k}}+\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^{l}}-\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^{j}}\right)$$

$$0=\frac{\partial \overset{2}{g}_{00}}{\partial x_{i}}+2\delta^{ij}\frac{\partial \overset{2}{g}_{jk}}{\partial x_{k}}-\delta^{kl}\frac{\partial \overset{2}{g}_{kl}}{\partial x_{i}} \qquad (3.6.25)$$

因此

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \overset{2}{g}_{00}}{\partial x_i} + \delta^{il}\frac{\partial \overset{2}{g}_{lj}}{\partial x_j} - \delta^{mn}\frac{\partial \overset{2}{g}_{mn}}{\partial x_i} = 0 \tag{3.6.26}$$

此即方程(3.6.20)。

由方程(3.6.19)出发，分别对 t 和 x_j 求偏导，得

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \overset{2}{g}_{00}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \overset{3}{g}_{0i}}{\partial t \partial x_i} + \frac{1}{2}\delta^{mn}\frac{\partial^2 \overset{2}{g}_{mn}}{\partial t^2} = 0 \tag{3.6.27a}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \overset{2}{g}_{00}}{\partial t \partial x_j} - \frac{\partial^2 \overset{3}{g}_{0i}}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{1}{2}\delta^{mn}\frac{\partial^2 \overset{2}{g}_{mn}}{\partial t \partial x_j} = 0 \tag{3.6.27b}$$

又从方程(3.6.20)出发，分别对 t 和 x_k 求偏导，得

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \overset{2}{g}_{00}}{\partial t \partial x_i} + \delta^{il}\frac{\partial^2 \overset{2}{g}_{lj}}{\partial t \partial x_j} - \frac{1}{2}\delta^{mn}\frac{\partial^2 \overset{2}{g}_{mn}}{\partial t \partial x_i} = 0 \tag{3.6.28a}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \overset{2}{g}_{00}}{\partial x_i \partial x_k} + \delta^{il}\frac{\partial^2 \overset{2}{g}_{lj}}{\partial x_j \partial x_k} - \frac{1}{2}\delta^{mn}\frac{\partial^2 \overset{2}{g}_{mn}}{\partial x_i \partial x_k} = 0 \tag{3.6.28b}$$

将方程(3.6.28a)中的指标 i 与 j 互换，代入方程(3.6.27b)之中，得

$$\delta^{jl}\frac{\partial^2 \overset{2}{g}_{il}}{\partial t \partial x_i} + \frac{\partial^2 \overset{3}{g}_{0i}}{\partial x_i \partial x_j} - \delta^{mn}\frac{\partial^2 \overset{2}{g}_{mn}}{\partial t \partial x_j} = 0 \tag{3.6.29}$$

将方程(3.6.28b)中的指标 i 与 k 互换，得

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \overset{2}{g}_{00}}{\partial x_k \partial x_i} + \delta^{kl}\frac{\partial^2 \overset{3}{g}_{jl}}{\partial x_j \partial x_i} - \frac{1}{2}\delta^{mn}\frac{\partial^2 \overset{2}{g}_{mn}}{\partial x_k \partial x_i} = 0 \tag{3.6.30}$$

将上式与方程(3.6.28b)合并，得

$$\frac{\partial^2 \overset{2}{g}_{00}}{\partial x_i \partial x_k} + \delta^{il}\frac{\partial^2 \overset{2}{g}_{lj}}{\partial x_j \partial x_k} + \delta^{kl}\frac{\partial^2 \overset{2}{g}_{lj}}{\partial x_j \partial x_i} - \delta^{mn}\frac{\partial^2 \overset{2}{g}_{mn}}{\partial x_i \partial x_k} = 0 \tag{3.6.31}$$

或

$$\frac{\partial^2 \overset{2}{g}_{00}}{\partial x_i \partial x_j} + \delta^{il}\frac{\partial^2 \overset{2}{g}_{lk}}{\partial x_k \partial x_j} + \delta^{jl}\frac{\partial^2 \overset{2}{g}_{lk}}{\partial x_k \partial x_i} - \delta^{mn}\frac{\partial^2 \overset{2}{g}_{mn}}{\partial x_i \partial x_j} = 0 \tag{3.6.32}$$

分别将方程(3.6.27a)、(3.6.20)代入方程(3.6.17b)，将方程(3.6.29)代入方程(3.6.17c)、将方程(3.6.32)代入方程(3.6.17d)，得

$$\overset{2}{R}_{00} = -\frac{1}{2}\Delta \overset{2}{g}_{00} \tag{3.6.33a}$$

$$\overset{4}{R}_{00} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{00}}{\partial t^2} - \frac{1}{2}\Delta \overset{4}{g}_{00} + \frac{1}{2}\overset{2}{g}_{ij}\frac{\partial^2 \overset{2}{g}_{00}}{\partial x_i \partial x_j}$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial \overset{2}{g}_{00}}{\partial x_i}\frac{1}{2}\frac{\partial \overset{2}{g}_{00}}{\partial x^i}-\frac{1}{4}\frac{\partial \overset{2}{g}_{00}}{\partial x_i}\frac{\partial \overset{2}{g}_{00}}{\partial x^i}$$

$$=-\frac{1}{2}\Delta \overset{4}{g}_{00}+\frac{1}{2}\frac{\partial_{00}^2}{\partial t^2}+\frac{1}{2}\overset{2}{g}_{ij}\frac{\partial^2 \overset{2}{g}_{00}}{\partial x_i \partial x_j}-\frac{1}{2}(\nabla \overset{2}{g}_{00})^2 \tag{3.6.33b}$$

$$\overset{3}{R}_{0i}=-\frac{1}{2}\Delta \overset{3}{g}_{i0} \tag{3.6.33c}$$

$$\overset{2}{R}_{ij}=-\frac{1}{2}\Delta \overset{2}{g}_{ij} \tag{3.6.33d}$$

其中 Δ 和 ∇分别是拉普拉斯算符和梯度算符。

我们的任务是求解一般引力场的度规 $g_{\mu\nu}$。有了度规,就好像在牛顿引力理论中有了引力位,其他问题都好解决了。为此,需要用到爱因斯坦场方程(3.4.25)

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R=8\pi G T_{\mu\nu} \tag{3.6.34}$$

对上式提升 μ 指标(即两边同时乘以 $g^{\mu\sigma}$)并与 ν 指标缩并,得(注意:$R^{\mu}{}_{\mu}=R_{\mu}{}^{\mu}=R$)

$$R-\frac{1}{2}2R=8\pi G T^{\mu}{}_{\mu} \tag{3.6.35}$$

即

$$R=-8\pi G T^{\mu}{}_{\mu} \tag{3.6.36}$$

于是,场方程(3.4.25)又可写成

$$R_{\mu\nu}=8\pi G(T_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}T^{\alpha}{}_{\alpha}) \tag{3.6.37}$$

我们曾经将 $T^{\mu\nu}$定义为能量动量张量(见3.3.4节)。具体地说,T^{00}、T^{i0}和 T^{ij}分别代表能量(质量)密度、动量密度和动量流密度。因此,它们分别具有如下展开式

$$T^{00}=\overset{0}{T}{}^{00}+\overset{2}{T}{}^{00}+\cdots \tag{3.6.38a}$$

$$T^{i0}=\overset{1}{T}{}^{i0}+\overset{3}{T}{}^{i0}+\cdots \tag{3.6.38b}$$

$$T^{ij}=\overset{2}{T}{}^{ij}+\overset{4}{T}{}^{ij}+\cdots \tag{3.6.38c}$$

其中 $\overset{N}{T}{}^{\mu\nu}$是 $T^{\mu\nu}$中量级为$(M/r^3)v^N$的项。比如,$\overset{0}{T}{}^{00}$的量级是 M/r^3,

因为它代表静质量密度，因此具有量纲 M/r^3。其他量的解释可根据 $T^{\mu\nu}$ 的定义类推。比如，T^{i0} 从 $\overset{1}{T}{}^{i0}$ 开始，是因为 T^{i0} 代表动量密度，最低阶量具有量级 $p/r^3 = Mv/r^3$。

令

$$S_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T^{\lambda}{}_{\lambda} \tag{3.6.39}$$

根据 $g_{\mu\nu}$ 的展开式(3.6.6)以及 $T_{\mu\nu}$ 的展开式(3.6.38)可得 $S_{\mu\nu}$ 的展开式

$$S_{00} = \overset{0}{S}_{00} + \overset{2}{S}_{00} + \cdots \tag{3.6.40a}$$

$$S_{0i} = \overset{1}{S}_{0i} + \overset{3}{S}_{0i} + \cdots \tag{3.6.40b}$$

$$S_{ij} = \overset{2}{S}_{ij} + \overset{4}{S}_{ij} + \cdots \tag{3.6.40c}$$

其中 $\overset{N}{S}_{\mu\nu}$ 表示 $S_{\mu\nu}$ 中量级为 $(M/r^3)v^N$ 的项。

在推出方程(3.6.40)的过程中，用到了 $T^{\lambda}{}_{\lambda}$ 的如下展开式

$$T^0{}_0 = \overset{0}{T}{}^0{}_0 + \overset{2}{T}{}^0{}_0 + \cdots$$

$$T^i{}_i = \overset{2}{T}{}^i{}_i + \overset{4}{T}{}^i{}_i + \cdots \tag{3.6.41}$$

这两式可根据方程(3.6.38)、(3.6.8)直接推出。至于 $T_{\mu\nu}$ 的展开式，则与方程(3.6.38)完全相同，只要将方程(3.6.38)中的上指标都降下来即可，这里不再列出。

由于方程(3.6.37)可写成

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G S_{\mu\nu} \tag{3.6.42}$$

注意到 $\overset{N}{R}_{\mu\nu}$ 是量级为 v^N/r^2 的项，$\overset{N}{S}_{\mu\nu}$ 是量级为 $(M/r^3)v^N = \frac{M}{r}v^N/r^2 \sim v^{N+2}/r^2$ 的项，方程(3.6.42)要能始终成立，它们两边的同阶次项必须相等，因此，我们有如下方程

$$\overset{N+2}{R}_{\mu\nu} = 8\pi G\overset{N}{S}_{\mu\nu},\ N = 0,1,2\cdots \tag{3.6.43}$$

实际上，就所需的精度要求而言，我们只需取 $N=0,1,2$。

由方程(3.6.39)

$$\overset{0}{S}_{00} = \overset{0}{T}_{00} - \frac{1}{2}[g_{00}(T^0{}_0 + T^i{}_i)]^{\underline{0}} \tag{3.6.44}$$

我们规定上标符号$\underline{N}$表示对整个因子取第N阶项，注意$T^i{}_i = T^1{}_1 + T^2{}_2 + T^3{}_3$，考虑到$T^i{}_i$没有零阶项，$g_{00}$的零阶项是$-1$，因此有

$$\overset{0}{S}_{00} = \overset{0}{T}_{00} + \frac{1}{2}\overset{0}{T}{}^0{}_0 \tag{3.6.45}$$

由于

$$\begin{aligned} T^\mu{}_\nu &= g^{\mu\lambda} T_{\lambda\nu} \\ T^0{}_0 &= g^{0\lambda} T_{\lambda 0} = g^{00} T_{00} + g^{0i} T_{i0} \end{aligned} \tag{3.6.46}$$

因此

$$\overset{0}{T}{}^0{}_0 = -\overset{0}{T}_{00} \tag{3.6.47}$$

显然，对$\overset{0}{T}{}^0{}_0$再提升指标0，则有

$$\overset{0}{T}{}^{00} = -\overset{0}{T}{}^0{}_0 = \overset{0}{T}_{00} \tag{3.6.48}$$

于是

$$\begin{aligned} \overset{0}{S}_{00} &= \overset{0}{T}_{00} + \frac{1}{2}(-\overset{0}{T}_{00}) = \frac{1}{2}\overset{0}{T}_{00} = \frac{1}{2}\overset{0}{T}{}^{00} \\ \overset{2}{S}_{00} &= \overset{2}{T}_{00} - \frac{1}{2}[g_{00}(T^0{}_0 + T^i{}_i)]^{\underline{2}} \\ &= \overset{2}{T}_{00} - \frac{1}{2}[(-1 + \overset{2}{g}_{00})(\overset{0}{T}{}^0{}_0 + \overset{2}{T}{}^0{}_0 + \overset{2}{T}{}^i{}_i)]^{\underline{2}} \\ &= \overset{2}{T}_{00} + \frac{1}{2}(\overset{2}{T}{}^0{}_0 + \overset{2}{T}{}^i{}_i) - \frac{1}{2}\overset{2}{g}_{00}\overset{0}{T}{}^0{}_0 \end{aligned} \tag{3.6.49}$$

因为

$$\begin{aligned} T^0{}_0 &= g^{\mu\nu} T_{\lambda\nu}\big|_{\mu=\lambda=0} = g^{0\nu} T_{0\nu} \\ &= g^{00} T_{00} + g^{0i} T_{0i} \\ \overset{2}{T}{}^0{}_0 &= [(-1 + \overset{2}{g}{}^{00})(\overset{0}{T}_{00} + \overset{2}{T}_{00})]^{\underline{2}} + 0 \\ &= -\overset{2}{T}_{00} + \overset{2}{g}{}^{00}\overset{0}{T}_{00} \\ T^{\mu\nu} &= g^{\mu\lambda} T^\nu{}_\lambda \\ T^{00} &= g^{0\lambda} T^0{}_\lambda = g^{00} T^0{}_0 + g^{0i} T^0{}_i \\ \overset{0}{T}{}^{00} &= -\overset{0}{T}{}^0{}_0 \\ \overset{2}{T}{}^{00} &= [(-1 + \overset{2}{g}{}^{00})(\overset{0}{T}{}^0{}_0 + \overset{2}{T}{}^0{}_0)]^{\underline{2}} \end{aligned}$$

$$= -\overset{2}{T}{}^{0}{}_{0} + \overset{2}{g}{}^{00}\overset{0}{T}{}^{0}{}_{0} = -\overset{2}{T}{}^{0}{}_{0} - \overset{2}{g}{}^{0}{}_{0}\overset{0}{T}{}^{0}{}_{0}$$

$$= -\overset{2}{T}{}^{0}{}_{0} + \overset{2}{g}_{00}\overset{0}{T}{}^{00}$$

$$T^{ii} = g^{i\lambda}T^{i}{}_{\lambda} = g^{i0}T^{i}{}_{0} + g^{ij}T^{i}{}_{j}$$

$$\overset{2}{T}{}^{ii} = (g^{ij}T^{i}{}_{j})_{\underline{2}} = (g^{ii}T^{i}{}_{i})_{\underline{2}}$$

$$= [(1 + \overset{2}{g}{}^{ii})\overset{2}{T}{}^{i}{}_{i}]_{\underline{2}} = \overset{2}{T}{}^{i}{}_{i}(\text{不求和!}) \tag{3.6.50}$$

因此

$$\overset{2}{S}_{00} = \overset{2}{T}_{00} + \frac{1}{2}(\overset{2}{T}{}^{0}{}_{0} + \overset{2}{T}{}^{i}{}_{i}) - \frac{1}{2}\overset{2}{g}_{00}\overset{0}{T}{}^{0}{}_{0}$$

$$= (-\overset{2}{T}{}^{0}{}_{0} + \overset{2}{g}{}^{00}\overset{0}{T}_{00}) + \frac{1}{2}\overset{2}{T}{}^{0}{}_{0} + \frac{1}{2}\overset{2}{T}{}^{i}{}_{i} - \frac{1}{2}\overset{2}{g}_{00}\overset{0}{T}_{00}$$

$$= -\frac{1}{2}(-\overset{2}{T}{}^{00} + \overset{2}{g}_{00}\overset{0}{T}_{00}) + \overset{2}{g}_{00}\overset{0}{T}_{00} - \frac{1}{2}\overset{2}{g}_{00}\overset{0}{T}_{00} + \frac{1}{2}\overset{2}{T}{}^{i}{}_{i}$$

$$= \frac{1}{2}\overset{2}{T}{}^{00} + \overset{2}{g}{}^{00}\overset{0}{T}{}^{00} + \frac{1}{2}\overset{2}{T}{}^{i}{}_{i}$$

$$\overset{1}{S}_{i0} = \left(T_{i0} - \frac{1}{2}g_{i0}T^{\lambda}{}_{\lambda}\right)_{\underline{1}} = \overset{1}{T}_{i0}$$

$$T^{\mu\nu} = g^{\mu\lambda}T^{\nu}{}_{\lambda} = g^{\mu\lambda}(g^{\nu\sigma}T_{\sigma\lambda})$$

$$T^{i0} = g^{i\lambda}(g^{0\sigma}T_{\sigma\lambda})$$

$$\overset{1}{T}{}^{i0} = [g^{ij}(g^{0\sigma}T_{\sigma j})]_{\underline{1}} = (g^{ij}g^{00}T_{0j})_{\underline{1}}$$

$$= -(g^{ij}T_{0j})_{\underline{1}} = -\delta^{ij}\overset{1}{T}_{0j}$$

$$= -\overset{1}{T}_{0i} = -\overset{1}{T}_{i0} \tag{3.6.51}$$

故有

$$\overset{1}{S}_{i0} = -\delta_{ij}\overset{1}{T}{}^{j0} \tag{3.6.52}$$

$$\overset{0}{S}_{ij} = \left(T_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}T^{\lambda}{}_{\lambda}\right)_{\underline{0}} = -\frac{1}{2}\delta_{ij}\overset{0}{T}{}^{0}{}_{0} = \frac{1}{2}\delta_{ij}\overset{0}{T}{}^{00} \tag{3.6.53}$$

将方程(3.6.49)~(3.6.53)以及方程(3.6.33)代入方程(3.6.43)之中,得

$$\Delta\overset{2}{g}_{00} = -8\pi G\overset{2}{T}{}^{00} \tag{3.6.54a}$$

$$\Delta \overset{4}{g}_{00} = \frac{\partial^2 \overset{2}{g}_{00}}{\partial t^2} + \overset{2}{g}_{ij} \frac{\partial^2 \overset{2}{g}_{00}}{\partial x_i \partial x_j} - (\nabla \overset{2}{g}_{00})^2$$

$$- 8\pi G(\overset{2}{T}{}^{00} - 2\overset{2}{g}_{00}\overset{0}{T}{}^{00} + \delta_{ij}\overset{2}{T}{}^{ij}) \qquad (3.6.54b)$$

$$\Delta \overset{3}{g}_{i0} = 16\pi G\delta_{ij}\overset{1}{T}{}^{j0} = -16\pi G\overset{1}{T}_{i0} \qquad (3.6.54c)$$

$$\Delta \overset{2}{g}_{ij} = -8\pi G\delta_{ij}\overset{0}{T}{}^{00} \qquad (3.6.54d)$$

注意 $\overset{1}{T}_{i0} = -\overset{1}{T}{}^{i0}$。

解方程(3.6.54),可以得到后牛顿近似下的度规 $g_{\mu\nu}$。方程(3.6.54a)实际上就是 Poisson 方程。若令

$$\overset{2}{g}_{00} = -2\varphi \qquad (3.6.55)$$

则

$$\Delta\varphi = 4\pi G\overset{0}{T}{}^{00} \qquad (3.6.56)$$

由于在无穷远处 $g_{\mu\nu}\to\eta_{\mu\nu}$,$\overset{2}{g}_{00}\to 0$,因此方程(3.6.56)的解可写成(Kellogg,1929)

$$\varphi(t,\boldsymbol{x}) = -G\int \frac{\overset{0}{T}{}^{00}(t,\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\mathrm{d}^3x' \qquad (3.6.57)$$

积分号下的 $\overset{0}{T}{}^{00}$ 就是物质的密度 $\rho(t,\boldsymbol{x})$。

类似地,方程(3.6.54d)的解可以写成

$$\overset{2}{g}_{ij} = +2\delta_{ij}G\int \frac{\overset{2}{T}{}^{00}(t,\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\mathrm{d}^3x' = -2\delta_{ij}\varphi \qquad (3.6.58)$$

方程(3.6.54c)的解则可写成

$$\overset{3}{g}_{i0} = 4G\int \frac{\overset{1}{T}_{i0}(t,\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\mathrm{d}^3x' \qquad (3.6.59)$$

显然,$\overset{3}{g}_{i0}$ 有三个分量。引进矢势 ζ_i,则有

$$\overset{3}{g}_{i0} \equiv \zeta_i \qquad (3.6.60)$$

$$\zeta_i = 4G\int \frac{\overset{1}{T}_{i0}(t,\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\mathrm{d}^3x' \qquad (3.6.61)$$

或

$$\zeta_i = -4G\int \frac{\overset{1}{T}{}^{i0}(t,\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\mathrm{d}^3x' \qquad (3.6.62)$$

剩下的问题是解方程(3.6.54b)。为此,将方程(3.6.55)、(3.6.58)代入方程(3.6.54b),有

$$\begin{aligned}\Delta \overset{4}{g}_{00} &= -2\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + (-2\delta^{ij}\varphi)\frac{\partial^2(-2\varphi)}{\partial x^i\partial x^j} - [\nabla(-2\varphi)]^2 \\ &\quad - 8\pi G(\overset{2}{T}{}^{00} + \overset{2}{T}{}^{i}{}_{i}) - 2(-2\varphi)(-2\Delta\varphi) \\ &= -2\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + 4\varphi\Delta\varphi - 4\left(\frac{1}{2}\Delta\varphi^2 - \varphi\Delta\varphi\right) - 8\varphi\Delta\varphi - 8\pi G(\overset{2}{T}{}^{00} + \overset{2}{T}{}^{i}{}_{i}) \\ &= -2\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - 2\Delta\varphi^2 - 8\pi G(\overset{2}{T}{}^{00} + \overset{2}{T}{}^{i}{}_{i}) \end{aligned} \tag{3.6.63}$$

因此

$$\Delta(\overset{4}{g}_{00} + 2\varphi^2) = -2\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + 4\pi G(\overset{2}{T}{}^{00} + \overset{2}{T}{}^{i}{}_{i})\right] \tag{3.6.64}$$

令

$$-2\psi = \overset{4}{g}_{00} + 2\varphi^2 \tag{3.6.65}$$

即

$$\overset{4}{g}_{00} = -2\varphi^2 - 2\psi \tag{3.6.66}$$

则

$$\psi = -\int \frac{1}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|}\left[\frac{1}{4\pi}\frac{\partial^2\varphi(t,\boldsymbol{x}')}{\partial t^2} + G\overset{2}{T}_{00}(t,\boldsymbol{x}') + G\overset{2}{T}{}^{i}{}_{i}(t,\boldsymbol{x}')\right]\mathrm{d}^3x' \tag{3.6.67}$$

其中,ψ 称为第二牛顿引力位,简称第二引力位;φ 称为第一牛顿引力位,简称第一引力位或牛顿引力位。

由谐和坐标条件不难验证,第一引力位 φ 与矢势 ζ_i 之间由下列方程约束

$$4\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \nabla\zeta = 0 \tag{3.6.68}$$

至此,我们求出了后牛顿近似下的度规 $g_{\mu\nu}$(按所需要的精度)。比如,

$$\begin{aligned} g_{00} &= \overset{0}{g}_{00} + \overset{2}{g}_{00} + \overset{4}{g}_{00} + \cdots = -1 - 2\varphi - 2\varphi^2 - 2\psi - \cdots \\ g_{i0} &= \overset{3}{g}_{i0} + \overset{5}{g}_{i0} + \cdots = \zeta_i + \cdots \\ g_{ij} &= \delta_{ij} + \overset{2}{g}_{ij} + \overset{4}{g}_{ij} + \cdots = \delta_{ij} - 2\delta_{ij}\varphi + \cdots \end{aligned} \tag{3.6.69}$$

由方程(3.6.69),我们又可写出 $\overset{N}{\Gamma}{}^{\lambda}{}_{\mu\nu}$ 以及 $\overset{N}{R}_{\mu\nu}$,比如

$$
\begin{aligned}
\overset{2}{\Gamma}{}^{i}{}_{00} &= \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \\
\overset{4}{\Gamma}{}^{i}{}_{00} &= \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(2\varphi^2 + \psi) + \frac{\partial\zeta^i}{\partial t} \\
\overset{3}{\Gamma}{}^{i}{}_{0j} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\zeta^i}{\partial x^j} - \frac{\partial\zeta_j}{\partial x_i}\right) - \delta^i{}_j\frac{\partial\varphi}{\partial t} \\
\overset{2}{\Gamma}{}^{i}{}_{jk} &= -\delta^i{}_j\frac{\partial\varphi}{\partial x^k} - \delta^i{}_k\frac{\partial\varphi}{\partial x^j} + \delta_{jk}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \\
\overset{3}{\Gamma}{}^{0}{}_{00} &= \frac{\partial\varphi}{\partial t} \\
\overset{2}{\Gamma}{}^{0}{}_{0i} &= \frac{\partial\varphi}{\partial x^i}
\end{aligned}
\tag{3.6.70}
$$

等等,其中 $\zeta^i \equiv \zeta_i$, $x^i \equiv x_i$, $\delta^i{}_j \equiv \delta_{ij}$。

应用后牛顿近似所需要的量已基本列出,以后若有进一步的需要(比如要求更高的精度等),再推求。值得指出的是,后牛顿近似是广义相对论理论的一种近似求解方法,可以精确到实际上所需要的任何程度。

3.6.2 质点和光子在后牛顿近似场中的运动方程

质点粒子的运动规律由方程(3.6.3)给出,将仿射联络(3.6.70)代入方程(3.6.3),按后牛顿近似,质点的运动方程可写成

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = &- \nabla(\varphi + 2\varphi^2 + \psi) - \frac{\partial\boldsymbol{\zeta}}{\partial t} + \boldsymbol{v}\times(\nabla\times\boldsymbol{\zeta}) + 3\boldsymbol{v}\frac{\partial\varphi}{\partial t} \\
&+ 4\boldsymbol{v}(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\varphi - v^2\nabla\varphi
\end{aligned}
\tag{3.6.71}
$$

其中 $\boldsymbol{v}$ 是速度矢量,其分量为 $v^i = \mathrm{d}x^i/\mathrm{d}t$。若按牛顿理论,质点在引力场中的运动方程可写成

$$
\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = -\nabla\varphi \tag{3.6.72}
$$

比较方程(3.6.71)和方程(3.6.72)可以看出广义相对论(在后牛顿近似之下)与牛顿理论的差异。

考虑质点的运动速度为零的那一瞬间的质点的加速度。这时

$$\boldsymbol{a}=\left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\right|_{v=0}=-\nabla(\varphi+2\varphi^2+\psi)-\frac{\partial\boldsymbol{\zeta}}{\partial t} \tag{3.6.73}$$

假定场源是均质圆球，按牛顿理论，质点的加速度仍然由方程(3.6.72)给出。但按广义相对论(在后牛顿近似之下)，不仅多出了两项 $-2\nabla\varphi^2-\nabla\psi$，还多出了与时间有关的旋转项 $\partial\zeta_i/\partial t$，后者是由均质圆球的转动引起的一个小量。假定均质圆球没有旋转，则

$$\frac{\partial\boldsymbol{\zeta}}{\partial t}=0 \tag{3.6.74}$$

方程(3.6.73)可简化为

$$\boldsymbol{a}=\left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\right|_{v=0}=-\nabla(\varphi+2\varphi^2+\psi) \tag{3.6.75}$$

基于方程(3.6.57)、(3.6.67)，对于无旋转均质圆球

$$\varphi=-\frac{GM}{r}$$

$$\varphi^2=\frac{G^2M^2}{r^2}$$

$$\psi=-G\int(\overset{2}{T}{}^{00}+\overset{2}{T}{}^{i}{}_{i})\mathrm{d}^3x'=0 \tag{3.6.76}$$

在上边的第三个方程中，动量流密度 $\overset{2}{T}{}^{i}{}_{i}$ 为零，而能量(质量)密度 $\overset{2}{T}{}^{00}$ 可假定已被吸收到了 $\overset{0}{T}{}^{00}$ 之中。于是，方程(3.6.75)可写成

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}=\left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\right|_{v=0}&=-\nabla\left(-\frac{GM}{r}+\frac{G^2M^2}{r^2}\right)\\&=-\frac{GM}{r^3}\boldsymbol{r}+\frac{2G^2M^2}{r^4}\boldsymbol{r}\\&=-\frac{GM}{r^3}\boldsymbol{r}-\frac{2GM}{r}\left(-\frac{GM}{r^3}\boldsymbol{r}\right)\end{aligned} \tag{3.6.77}$$

将 $\boldsymbol{a}$ 解释为单位质点处于静止状态时所受到的引力加速度，那么，与牛顿理论相比，广义相对论(后牛顿近似)多出一个附加项

$$-\frac{2GM}{r}\left(-\frac{GM}{r^3}\boldsymbol{r}\right)=-\frac{2GM}{r}\boldsymbol{g} \tag{3.6.78}$$

其中 $\boldsymbol{g}$ 是引力加速度。

将这里的结果与3.5.6节中Schwarzschild度规场中的结果比较

(参见方程(3.5.134)),二者是完全一致的。当然,本节给出的方程(3.6.71)具有更广泛的应用价值,它适用于任意(可以旋转)质体产生的场,而 Schwarzschild 度规则只适用于无旋转均质圆球产生的场。

利用后牛顿场,可以写出原时 $d\tau$ 与坐标时 dt 之间的关系。由原时定义

$$d\tau^2 = -g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \tag{3.6.79}$$

得

$$\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 = -g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{dt} = -g_{00} - 2g_{i0}v^i - g_{ij}v^iv^j \tag{3.6.80}$$

准确到 v^4,有

$$\begin{aligned}\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 &= -(-1 + \overset{2}{g}_{00} + \overset{4}{g}_{00}) - 2\overset{3}{g}_{i0}v^i - (\delta_{ij} + \overset{2}{g}_{ij})v^iv^j \\ &= 1 - (v^2 + \overset{2}{g}_{00} - (\overset{4}{g}_{00} + 2\overset{3}{g}_{i0}v^i + \overset{2}{g}_{ij}v^iv^j) \\ &= 1 - (v^2 - 2\varphi) - (-2\varphi^2 - 2\psi + 2\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\zeta} - 2\varphi v^2) \\ &= 1 + (2\varphi - v^2) + 2(\varphi^2 + \psi - 2\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\zeta} + \varphi v^2)\end{aligned} \tag{3.6.81}$$

因此

$$\begin{aligned}\frac{d\tau}{dt} &= 1 + \frac{1}{2}(2\varphi - v^2) + (\varphi^2 + \psi - 2\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\zeta} + \varphi v^2) - \frac{1}{8}(2\varphi - v^2)^2 \\ &= 1 + \left(\varphi - \frac{1}{2}v^2\right) + \left(\frac{1}{2}\varphi^2 + \psi - 2\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\zeta} + \frac{3}{2}\varphi v^2 - \frac{1}{8}v^4\right)\end{aligned} \tag{3.6.82}$$

上述方程给出了原时与坐标时之间的关系。

方程(3.6.82)可直接应用于 GPS 测量中对卫星时钟的修正。若取地心准惯性参考系,$d\tau$ 表示卫星钟的守时间隔,dt 表示地心时钟的守时间隔,φ 是牛顿引力位(第一引力位),v 是卫星运动速度,可重写于下

$$\frac{d\tau}{dt} = 1 + \left(\varphi_s - \frac{1}{2}v_s^2\right) + \frac{1}{2}\varphi_s^2 + \psi_s - 2\boldsymbol{v}_s\cdot\boldsymbol{\zeta}_s + \frac{3}{2}\varphi_s v_s^2 - \frac{1}{8}v_s^4 \tag{3.6.83}$$

其中下标 s 表示对应于卫星所在位置的量。

地心时 dt 与地面时 dT 之间也可写出类似的方程

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=1+\varphi_e-\frac{1}{2}v_e^2+\frac{1}{2}\varphi_e^2+\psi_e-2\boldsymbol{v}_e\cdot\boldsymbol{\zeta}_e+\frac{3}{2}\varphi_e v_e^2-\frac{1}{8}v_e^4 \tag{3.6.84}$$

其中下标 e 表示对应于地面上相应点的量。

方程(3.6.83)和方程(3.6.84)消去 $\mathrm{d}t$,即可得到卫星时 $\mathrm{d}\tau$ 与地面时 $\mathrm{d}T$ 之间的关系式。这个关系式给出了如何根据地面(如卫星监控中心站)时钟的守时修正卫星时钟的守时(或者,根据卫星时钟的守时修正地面接收机时钟的守时)。

下面考虑光子在引力场中的运动方程。由于引力作用,光线要发生偏转,这在 3.5.4 节已经给出。同样,由于引力场的存在,光速不再是恒定值。为了证实这一点,我们从光子的运动方程

$$\mathrm{d}\tau^2=-g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu=0 \tag{3.6.85}$$

出发。由上式

$$g_{00}+2g_{i0}v^i+g_{ij}v^iv^j=0 \tag{3.6.86}$$

为简单起见,准确到 GM/r 量级,上式可写成

$$-1+\overset{2}{g}_{00}+v^2=0 \tag{3.6.87}$$

即

$$v^2=1-\overset{2}{g}_{00}=1+2\varphi+o(GM/r) \tag{3.6.88}$$

或

$$|\boldsymbol{v}|=1+\varphi+o(GM/r) \tag{3.6.89}$$

这个方程表述了光速在引力场中的可变性。这里需要强调指出,在引力场中,如果限于局部惯性系中考察,那么,光速仍然是恒定的。

由于光速是变值,我们可以考虑用经典方式测定地月之间的距离的误差。假定用激光测距方法得到了地月之间(地球表面至月球表面)的距离为

$$D=2tc \tag{3.6.90}$$

其中,c 是真空中光速,取为 1(光速单位制);$2t$ 是激光发射时刻至返回时刻所花费的时间。

由于光速是变值,实际距离应该是

$$s=2\int_0^t v\mathrm{d}t=2\int_0^t(1+\varphi)\mathrm{d}t$$

$$= 2t + 2\int_0^t \varphi \mathrm{d}t = D + 2\int_0^t \varphi \mathrm{d}t$$

$$\approx D - 2\int_0^t \left(\frac{GM}{r} + \frac{Gm}{d - r}\right)\mathrm{d}t \qquad (3.6.91)$$

在上式中，积分号下第一项是地球引力位，第二项是月球引力位，d 是地心至月心的距离。误差的量级为

$$\delta = 2\int_0^t \left(\frac{GM}{r} + \frac{Gm}{d - r}\right)\mathrm{d}t$$

$$\approx \frac{2t}{2}\left\{\left[\frac{GM}{r(0)} + \frac{Gm}{d - r(0)}\right] + \left[\frac{GM}{r(t)} + \frac{Gm}{d - r(t)}\right]\right\} \qquad (3.6.92)$$

其中

$$r(0) = r\big|_{t=0} = d - R_0 \qquad (3.6.93)$$

$$r(t) = r\big|_{t=t} = R \qquad (3.6.94)$$

在上式中，R_0 和 R 分别是月球和地球的半径。因此

$$\delta \approx GM + \frac{D}{2R}GM \approx 31\,\frac{GM}{R}R$$

$$\approx 31 \times \left(\frac{6}{9} \times 10^{-9}\right) \times (6.4 \times 10^8 \mathrm{cm})$$

$$\approx 13.2\mathrm{cm} \qquad (3.6.95)$$

由此可见，由于在引力场中光速并非恒定值，对于地球和月球之间这样远的距离，将光速值当作恒定值来处理时，所带来的误差达到了分米级（不考虑其他误差源影响）。因此，对于高精度测量要求来说，有必要考虑相对论效应。

3.6.3 能量动量张量的计算

为了精确求定一个质体产生的引力场，如何计算作为引力场源的能量动量张量 $T^{\mu\nu}$ 是关键。假定不存在其他外力作用，由方程(3.3.34)，$T^{\mu\nu}$ 满足如下守恒律

$$D_\beta T^{\alpha\beta} = 0 \qquad (3.6.96)$$

此即

$$\partial_\beta T^{\alpha\beta} + \Gamma^\alpha{}_{\beta\lambda} T^{\lambda\beta} + \Gamma^\beta{}_{\beta\lambda} T^{\alpha\lambda} = 0 \qquad (3.6.97)$$

或写成

$$\frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^{\beta}} = -\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\lambda}T^{\lambda\beta} - \Gamma^{\beta}{}_{\beta\lambda}T^{\alpha\lambda} \tag{3.6.98}$$

由于 $g_{\mu\nu}$(或 $g^{\mu\nu}$)的非常数项的最低量级为 v^2,而 $\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}$由 $g_{\mu\nu}$的导数组成,因此, $\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}$的最低量级至少是 v^2/r。注意到

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \sim \frac{1}{r}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \sim \frac{v}{r} \tag{3.6.99}$$

以及 $\overset{N}{T}{}^{\mu\nu}$具有量级$(M/r^3)v^N$,因此,方程(3.6.100)取至量级 Mv/r^4,则有

$$\frac{\partial}{\partial t}\overset{0}{T}{}^{00} + \frac{\partial}{\partial x^i}\overset{1}{T}{}^{i0} = 0 \tag{3.6.100}$$

由于 $\overset{0}{T}{}^{00}$是质量密度,而 $\overset{1}{T}{}^{i0}$是质量流密度,很类似于如下方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0 \tag{3.6.101}$$

因此,方程(3.6.100)可称之为质量守恒定律。

如果将方程(3.6.54a)、(3.6.54c)、(3.6.55)以及方程(3.6.60)代入方程(3.6.100),则可推出谐和坐标条件(3.6.68)

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{1}{8\pi G}\Delta\overset{2}{g}_{00}\right) + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{16\pi G}\Delta\overset{3}{g}_{i0}\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}[-2(-2\Delta\varphi)] + \frac{\partial}{\partial x^i}\Delta\zeta^i = 0$$

$$\Delta\left(4\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \nabla\cdot\boldsymbol{\zeta}\right) = 0 \tag{3.6.102}$$

由于 φ 和 ζ_i 在无穷远处必须为零,因此

$$4\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \nabla\cdot\boldsymbol{\zeta} = 0 \tag{3.6.103}$$

此即谐和坐标条件(3.6.68)。

如果在方程(3.6.98)中取 $\beta = i$,并考虑 Mv^2/r^4 的项,则有

$$\frac{\partial}{\partial t}\overset{1}{T}{}^{0i} + \frac{\partial}{\partial x^j}\overset{2}{T}{}^{ij} = -\overset{2}{\Gamma}{}^{i}{}_{00}\overset{0}{T}{}^{00} \tag{3.6.104}$$

由于(参见方程(3.6.70))

$$\overset{2}{\Gamma}{}^{i}{}_{00} = \partial^i\varphi \tag{3.6.105}$$

其中 $\partial^i \equiv \partial/\partial x_i$，因此有

$$\frac{\partial}{\partial t}\overset{1}{T}{}^{i0} + \frac{\partial}{\partial x^j}\overset{2}{T}{}^{ij} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\overset{0}{T}{}^{00} \tag{3.6.106}$$

这个方程是动量流 $\overset{2}{T}{}^{ij}$应该满足的方程。

根据能量动量张量的表达式(3.3.38)，对于任意质点系，有

$$T^{\alpha\beta} = g^{-\frac{1}{2}}\sum_n m_n \frac{\mathrm{d}x_n^\alpha(t)}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x_n^\beta(t)}{\mathrm{d}t} \times \left(\frac{\mathrm{d}\tau_n}{\mathrm{d}t}\right)^{-1}\delta^3(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_n(t)) \tag{3.6.107}$$

其中 g 是 $g_{\mu\nu}$的行列式。根据 $g_{\mu\nu}$的展开式(3.6.6)以及行列式运算规则，可以将 g 写成

$$g = 1 + \overset{2}{g} + \overset{4}{g} + \cdots \tag{3.6.108}$$

其中 $\overset{N}{g}$ 的量级是 v^N。显然，$\overset{0}{g}=1$，$\overset{4}{g}$ 在后面不需要。为了求出 $\overset{2}{g}$，将 g 写成

$$-g = \begin{vmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} \tag{3.6.109}$$

根据方程(3.6.6)，为了推求 $\overset{2}{g}$，将高阶项都略去，则有

$$\begin{aligned} -g &= \begin{vmatrix} -1+\overset{2}{g}_{00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\overset{2}{g}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\overset{2}{g}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\overset{2}{g}_{33} \end{vmatrix} \\ &= (-1+\overset{2}{g}_{00})(1+\overset{2}{g}_{11})(1+\overset{2}{g}_{22})(1+\overset{2}{g}_{33}) \\ &= (-1+\overset{2}{g}_{00})(1+\overset{2}{g}_{11}+1+\overset{2}{g}_{22}+1+\overset{2}{g}_{33}) = -1+\overset{2}{g}_{00} - \delta^{ij}\overset{2}{g}_{ij} \end{aligned} \tag{3.6.110}$$

因此

$$g = 1 - \overset{2}{g}_{00} + \delta^{ij}\overset{2}{g}_{ij}$$

$$\overset{0}{g} = 1$$

$$\overset{2}{g} = -\overset{2}{g}_{00} + \delta^{ij}\overset{2}{g}_{ij} \tag{3.6.111}$$

将方程(3.6.55)、(3.6.67)代入方程(3.6.113),得

$$\overset{2}{g} = 2\varphi - 2\delta^{i}{}_{i}\varphi = 2\varphi - 6\varphi = -4\varphi \tag{3.6.112}$$

对于第 n 个质点粒子来说,每个粒子的原时 $\mathrm{d}\tau_n$ 满足如下方程(参见方程(3.6.82))

$$\frac{\mathrm{d}\tau_n}{\mathrm{d}t} = 1 + \left(\varphi - \frac{1}{2}v_n^2\right) + \frac{1}{2}\left(\varphi^2 + \psi - 2\boldsymbol{v}_n \cdot \boldsymbol{\zeta} + \frac{3}{2}\varphi\, v_n^2 - \frac{1}{8}v_n^4\right) \tag{3.6.113}$$

其中 $\boldsymbol{v}_n$ 是第 n 个粒子的运动速度。若只保留到 v^2 量级,则有

$$\frac{\mathrm{d}\tau_n}{\mathrm{d}t} = 1 + \left(\varphi - \frac{1}{2}v_n^2\right) \tag{3.6.114}$$

或写成

$$\left(\frac{\mathrm{d}\tau_n}{\mathrm{d}t}\right)^{-1} = 1 - \left(\varphi - \frac{1}{2}v_n^2\right) \tag{3.6.115}$$

将方程(3.6.111)~(3.6.115)代入方程(3.6.107),注意到 $x_n^0 = t$,得

$$\overset{0}{T}{}^{00} = \sum_n m_n \delta^3(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_n(t)) \tag{3.6.116}$$

$$\begin{aligned}\overset{2}{T}{}^{00} &= \left\{g^{-\frac{1}{2}}\sum_n m_n\left(1 - \left(\varphi - \frac{1}{2}v_n^2\right)\right)\delta^3(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_n(t))\right\}^2 \\ &= \left[\left(1 - \frac{1}{2}\overset{2}{g}\right)\sum_n m_n \cdots\right]^2 \\ &= {}_n m_n\left(-\varphi + \frac{1}{2}v_n^2\right)\delta^3(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_n) + \sum_n m_n\left[-\frac{1}{2}(-4\varphi)\right]\delta^3(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_n) \\ &= \sum_n m_n\left(\varphi + \frac{1}{2}v_n^2\right)\delta^3 \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_n)\end{aligned} \tag{3.6.117}$$

$$\overset{1}{T}{}^{i0} = \sum_n m_n v_n^i \delta^3(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_n) \tag{3.6.118}$$

$$\overset{2}{T}{}^{ij} = \sum_n m_n v_n^i v_n^j \delta^3(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_n) \tag{3.6.119}$$

其中 $v_n^i = \mathrm{d}x_n^i/\mathrm{d}t$。注意到

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_n(t)) &= \frac{\mathrm{d}x_n^i}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial x_n^i}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_n(t)) \\ &= -v_n^i\frac{\partial}{\partial x^i}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_n(t)) \\ &= -\boldsymbol{v}_n\ \nabla\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_n(t))\end{aligned} \tag{3.6.120}$$

则由方程(3.6.116)~(3.6.119)得

$$\frac{\partial}{\partial t}\overset{0}{T}{}^{00}+\frac{\partial}{\partial x^i}\overset{1}{T}{}^{i0}=0 \tag{3.6.121}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\overset{1}{T}{}^{0i}+\frac{\partial}{\partial x^j}\overset{2}{T}{}^{ij}=\sum_n m_n\frac{\mathrm{d}v_n^i}{\mathrm{d}t}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_n) \tag{3.6.122}$$

方程(3.6.121)就是前面曾经给出的质量守恒律(3.6.100)。

比较方程(3.6.122)与方程(3.6.106),我们有

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\overset{0}{T}{}^{00}=\sum_n m_n\frac{\mathrm{d}v_n^i}{\mathrm{d}t}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_n) \tag{3.6.123}$$

再将方程(3.6.116)代入上式,得

$$-\sum_n m_n\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_n)=\sum_n m_n\frac{\mathrm{d}v_n^i}{\mathrm{d}t}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_n) \tag{3.6.124}$$

故有

$$\frac{\mathrm{d}v_n^i}{\mathrm{d}t}=-\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \tag{3.6.125}$$

或写成

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_n}{\mathrm{d}t}=-\ \nabla\varphi \tag{3.6.126}$$

现在我们叙述计算 $T^{\mu\nu}$ 的步骤(实际上只要计算 $\overset{0}{T}{}^{00}$,$\overset{2}{T}{}^{00}$,$\overset{2}{T}{}^{i0}$ 以及 $\overset{2}{T}{}^{ij}$ 就足够了,其他诸量很少用到)。首先利用

$$\overset{0}{T}{}^{00}=\sum_n m_n\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_n) \tag{3.6.127}$$

以及公式

$$\varphi=-G\int\frac{\overset{0}{T}{}^{00}(\boldsymbol{x}',t)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\mathrm{d}^3x' \tag{3.6.128}$$

计算出 φ，再利用方程(3.6.126)求解出 $\boldsymbol{v}_n$，进而求出 $\boldsymbol{x}_n$，从而可由方程(3.6.117)～(3.6.119)求出 $\overset{2}{T}{}^{00}$、$\overset{1}{T}{}^{i0}$ 以及 $\overset{2}{T}{}^{ij}$。再利用第二引力位 ψ 以及位矢 ζ 的表达式(见 3.6.1 节(3.6.67)式)

$$\psi = -\int \frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\left[\frac{1}{4\pi}\frac{\partial^2\varphi(\boldsymbol{x}',t)}{\partial t^2} + G\overset{2}{T}{}^{00}(\boldsymbol{x}',t) + G\overset{2}{T}{}^{i}{}_{i}(\boldsymbol{x}',t)\right]\mathrm{d}\tau' \tag{3.6.129}$$

$$\zeta^i = -4G\int \frac{\overset{1}{T}{}^{i0}(\boldsymbol{x}',t)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\mathrm{d}\tau' \tag{3.6.130}$$

计算出 ψ 和 ζ_i，然后再根据方程(3.6.71)求解较精确的 v_n 以及 x_n。如此再进行循环迭代，则可以使上述所求诸量越来越精确。爱因斯坦等曾经证明(Einstein et al., 1938; Einstein and Infeld, 1940; Infeld and Schild, 1949; Gorbatenko and Gorbatenko, 2006)，上述迭代过程可以一直进行下去，所得结果是收敛的。

作为一个例子，我们考察均质圆球在外部产生的场。假定均质圆球无旋转。在球体外部，可近似认为 $T^{\mu\nu}=0$。对于均质圆球，物质的密度 $\overset{0}{T}{}^{00}$ 是常数 ρ。由方程(3.6.128)得

$$\varphi = -G\int \frac{\rho}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\mathrm{d}\tau' = -\frac{GM}{|\boldsymbol{x}|} \equiv -\frac{GM}{r} \tag{3.6.131}$$

其中 M 是球体质量。

显然，第一引力位(即牛顿引力位)φ 与时间无关。

对于无旋转的静止圆球，质量流密度 T^{i0} 和动量流密度 T^{ij} 均为零。因此，由方程(3.6.129)和方程(3.6.130)，得

$$\psi = -\int \frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}G\overset{2}{T}{}^{00}\mathrm{d}\tau' \tag{3.6.132}$$

$$\zeta_i = 0 \tag{3.6.133}$$

对于静止的均质圆球，$T^{00}\equiv\rho$，因此，$\overset{2}{T}{}^{00}=0$。故由方程(3.6.132)得

$$\psi = 0 \tag{3.6.134}$$

最后，根据(参见 3.6.1 节方程(3.6.6))

$$g_{00} = -1 + \overset{2}{g}_{00} + \overset{4}{g}_{00} + \cdots$$

$$g_{i0} = \overset{3}{g}_{0i} + \overset{5}{g}_{0i} + \cdots$$

$$g_{ij} = \delta_{ij} + \overset{2}{g}_{ij} + \cdots \qquad (3.6.135)$$

以及

$$\overset{2}{g}_{00} = -2\varphi, \quad \overset{4}{g}_{00} = -2\varphi^2 - 2\psi = -2\varphi^2$$

$$\overset{2}{g}_{ij} = -2\delta_{ij}\varphi, \quad \overset{3}{g}_{i0} = \zeta_i = 0 \qquad (3.6.136)$$

得

$$g_{00} \approx -1 + \frac{2GM}{r} - \frac{2G^2M^2}{r^2} \qquad (3.6.137\text{a})$$

$$g_{i0} = 0 \qquad (3.6.137\text{b})$$

$$g_{ij} = \delta_{ij} - 2\delta_{ij}\left(-\frac{GM}{r}\right) = \delta_{ij} + 2\delta_{ij}\frac{GM}{r} \qquad (3.6.137\text{c})$$

由此可写出原时

$$\mathrm{d}\tau^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r} + \frac{2G^2M^2}{r^2}\right)\mathrm{d}t^2 - \left(1 + 2\frac{GM}{r}\right)(\mathrm{d}\boldsymbol{x})^2 \qquad (3.6.138)$$

准确到 GM/r，则有

$$\mathrm{d}\tau^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)\mathrm{d}t^2 - \left(1 + \frac{2GM}{r}\right)(\mathrm{d}\boldsymbol{x})^2 \qquad (3.6.139)$$

我们知道，Schwarzschild 度规在球面坐标系中取如下标准形式

$$\mathrm{d}\tau^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)\mathrm{d}t^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2 - r^2\mathrm{d}\theta^2 - r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\lambda^2 \qquad (3.6.140)$$

将这个标准形式转换到准惯性直角坐标系（坐标系原点仍然在球心）之中，准确到 GM/r，则得到方程(3.6.139)。为了证实这一点，引进变量代换

$$\rho = \frac{1}{2}\sqrt{r^2 - 2GMr} + \frac{1}{2}r - \frac{1}{2}GM \quad (r \geqslant 2GM) \qquad (3.6.141)$$

此即

$$r = \rho\left(1 + \frac{GM}{2\rho}\right)^2 \quad \left(\rho > \frac{1}{2}GM\right) \qquad (3.6.142)$$

将方程(3.6.142)代入方程(3.6.140)，得

$$d\tau^2 = \left(\frac{1 - GM/2\rho}{1 + GM/2\rho}\right)^2 dt - \left(1 + \frac{GM}{2\rho}\right)^4 (d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + \rho^2 \sin^2\theta d\lambda^2)$$
$$= \left(\frac{1 - GM/2\rho}{1 + GM/2\rho}\right)^2 dt^2 - \left(1 + \frac{GM}{2\rho}\right)^4 (d\boldsymbol{x})^2 \qquad (3.6.143)$$

准确到 GM/ρ，则上式成为

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{2GM}{\rho}\right)dt^2 - \left(1 + \frac{2GM}{\rho}\right)(d\boldsymbol{x})^2 \qquad (3.6.144)$$

将方程(3.6.142)代入方程(3.6.144)，同样准确到 GM/ρ（或 GM/r），则得到方程(3.6.139)。

由此证实了我们的结论。这表明，方程(3.6.139)给出了Schwarzschild度规在直角坐标系下的表达形式（准确到 GM/r）。

上面的例子表明，根据后牛顿近似，可以推导出Schwarzschild度规（准确到 GM/r）。

如果均质圆球以角速度 ω 旋转，则 φ 仍然由方程(3.6.131)给出，ψ 仍然为零，但 $\boldsymbol{\zeta}$ 不为零。质量流密度（即动量密度）$\overset{1}{T}{}^{i0}$（此即 ρv^i，其中 $v^i = v_i$）由下式给出

$$\overset{1}{T}{}^{i0} = \overset{0}{T}{}^{00}(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{x})^i \qquad (3.6.145)$$

由方程(3.6.130)和方程(3.6.145)，得

$$\boldsymbol{\zeta} = -4G\int \frac{\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x}') \times \boldsymbol{x}'}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|}\overset{0}{T}{}^{00} d\tau' \qquad (3.6.146)$$

假定旋转角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 是恒定的，则

$$\boldsymbol{\zeta} = -4G\overset{0}{T}{}^{00}\boldsymbol{\omega} \times \int \frac{\boldsymbol{x}'}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} d\tau' \qquad (3.6.147)$$

为了求出 $\boldsymbol{\zeta}$，我们需要完成积分

$$\boldsymbol{I} = \int \frac{\boldsymbol{x}'}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} d\tau' \qquad (3.6.148)$$

由于

$$d\tau' = r'^2 d\Omega' dr'$$
$$\boldsymbol{I} = \int \frac{\boldsymbol{x}'}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} r'^2 dr' d\Omega'$$
$$= \int \left(r'^2 \int \frac{\boldsymbol{x}'}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} d\Omega'\right) dr' \qquad (3.6.149)$$

其中 $d\Omega'$表示立体角，而

$$\int \frac{\boldsymbol{x}'}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}d\Omega' = \begin{cases} \left(\dfrac{4\pi r'^2}{3r^3}\right)\boldsymbol{x}, & \text{当 } r'<r \\ \left(\dfrac{4\pi}{3r'}\right)\boldsymbol{x}, & \text{当 } r'>r \end{cases} \tag{3.6.150}$$

当 $r'<r$ 时

$$\boldsymbol{I} = \int_0^R \frac{4\pi r'^4}{3r^3}\boldsymbol{x}dr' = \frac{4\pi}{3r^3}\frac{R^5}{5}\boldsymbol{x} \tag{3.6.151}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\zeta} &= -4G\boldsymbol{\omega}\times\frac{R^2M}{5r^3}\boldsymbol{x} \\ &= 2G\frac{\boldsymbol{x}}{r^2}\times\left(\frac{2R^2M}{5}\boldsymbol{\omega}\right) \\ &= \frac{2G}{r^3}\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{J} \end{aligned} \tag{3.6.152}$$

其中

$$\boldsymbol{J} = \frac{2R^2M}{5}\boldsymbol{\omega} \tag{3.6.153}$$

正好是均质圆球的自转角动量（$\boldsymbol{\omega}$ 为常矢，$2R^2M/5$ 是均质圆球的转动惯量）。方程(3.6.155)给出了圆球外部的矢量场 $\boldsymbol{\zeta}$。

假定圆球是空的球壳，那么，在球壳内部

$$\boldsymbol{I} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{4\pi r'}{3}\boldsymbol{x}dr' = \frac{4\pi}{3}\frac{R_2^2-R_1^2}{2}\boldsymbol{x} \tag{3.6.154}$$

因此

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\zeta} &= -4G\boldsymbol{\omega}\times\frac{4\pi}{3}\overset{0}{T}{}^{00}\frac{R_2^2-R_1^2}{2}\boldsymbol{x} \\ &= -4G\boldsymbol{\omega}\times\frac{1}{2}\frac{R_2^2-R_1^2}{R_2^3-R_1^3}\boldsymbol{x} \\ &= 2G\boldsymbol{x}\times\frac{R_2^2-R_1^2}{R_2^3-R_1^3}\boldsymbol{\omega} \end{aligned} \tag{3.6.155}$$

方程(3.6.155)给出了球壳内部的矢量场 $\boldsymbol{\zeta}$。

以大地测量为目的，我们感兴趣的是圆球外部的场。根据方程(3.6.131)和方程(3.6.155)，注意到 $\psi=0$，利用

$$
\begin{aligned}
g_{00} &= -1 - 2\varphi - 2\varphi^2 \\
g_{i0} &= \overset{3}{g}_{i0} = \zeta_i \\
g_{ij} &= \delta_{ij} + \overset{2}{g}_{ij} = \delta_{ij} - 2\delta_{ij}\varphi
\end{aligned}
\tag{3.6.156}
$$

可写出

$$
\begin{aligned}
g_{00} &= -1 + \frac{2GM}{r} - \frac{2G^2M^2}{r^2} \\
g_{i0} &= \frac{2G}{r^3}(\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{J})_i \\
g_{ij} &= \delta_{ij} + 2\delta_{ij}\frac{GM}{r}
\end{aligned}
\tag{3.6.157}
$$

于是可写出原时形式

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\tau^2 = &\left(1 - \frac{2GM}{r} + \frac{2G^2M^2}{r^2}\right)\mathrm{d}t^2 - \left(1 + \frac{2GM}{r}\right)(\mathrm{d}\boldsymbol{x})^2 \\
&- \frac{2G}{r^3}(\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{J})_i \mathrm{d}t\mathrm{d}x^i
\end{aligned}
\tag{3.6.158}
$$

方程(3.6.157)或方程(3.6.158)给出了具有匀速旋转运动的均质圆球所引起的外部空间的度规。这实际上就是以前曾经给出的 Kerr 度规在直角坐标中的表述形式。

3.6.4　引力场与引力磁场

我们在后牛顿近似下考察爱因斯坦场方程

$$
R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G T_{\mu\nu} \tag{3.6.159}
$$

或写成

$$
R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}R = 8\pi G T_{00} \tag{3.6.160a}
$$

$$
R_{0i} - \frac{1}{2}g_{0i}R = 8\pi G T_{0i} \tag{3.6.160b}
$$

$$
R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R = 8\pi G T_{ij} \tag{3.6.160c}
$$

准确到 v^3/r^3，将方程(3.6.33)代入方程(3.6.160)，得

$$
-\frac{1}{2}\Delta\overset{2}{g}_{00} - \frac{1}{2}g_{00}R = 8\pi G\overset{0}{T}_{00} \tag{3.6.161a}
$$

$$-\frac{1}{2}\Delta\overset{2}{g}_{i0}-\frac{1}{2}g_{0i}R=8\pi G\overset{0}{T}_{0i} \tag{3.6.161b}$$

$$-\frac{1}{2}\Delta\overset{2}{g}_{ij}-\frac{1}{2}g_{ij}R=8\pi G\overset{0}{T}_{ij} \tag{3.6.161c}$$

按定义，Ricci 标量可表示成

$$\begin{aligned}R&\equiv R^{\lambda}{}_{\lambda}=(g^{\lambda\mu}R_{\sigma\mu})\delta^{\sigma}{}_{\lambda}=g^{\lambda\mu}R_{\lambda\mu}=g^{0\mu}R_{0\mu}+g^{i\mu}R_{i\mu}\\&=g^{00}R_{00}+g^{0i}R_{0i}+g^{i0}R_{i0}+g^{ij}R_{ij}\end{aligned} \tag{3.6.162}$$

由于只将 R 保留到 v^3/r^2，注意到方程(3.6.8)和方程(3.6.15)，R 可写成

$$\begin{aligned}R&=[(-1+\overset{2}{g}_{00})\overset{2}{R}_{00}]^{\leqslant 3}+[(\delta^{ij}+\overset{2}{g}{}^{ij})\overset{2}{R}_{ij}]^{\leqslant 3}\\&=-\overset{2}{R}_{00}+\delta^{ij}\overset{2}{R}_{ij}\end{aligned} \tag{3.6.163}$$

其中，上指标"≤3"表示不超过阶次为 v^3/r^2 的所有项。

将方程(3.6.33)代入方程(3.6.163)，得

$$R=\frac{1}{2}\Delta\overset{2}{g}_{00}-\frac{1}{2}\Delta(\delta^{ij}\overset{2}{g}_{ij}) \tag{3.6.164}$$

显然，由方程(3.6.163)给出的 R 具有量级 v^2/r^2（因为 $\overset{2}{g}_{\mu\nu}$ 具有量级 v^2，因而 $\Delta g_{\mu\nu}$ 具有量级 v^2/r^2）。让我们再计算 $g_{\mu\nu}R$ 不超过量级 v^3/r^2 的项：

$$[g_{00}R]^{\leqslant 3}=-R=-\frac{1}{2}\Delta\overset{2}{g}_{00}+\frac{1}{2}\Delta(\delta^{ij}\overset{2}{g}_{ij}) \tag{3.6.165}$$

$$[g_{i0}R]^{\leqslant 3}=0 \tag{3.6.166}$$

$$[g_{ij}R]^{\leqslant 3}=\left[\frac{1}{2}\Delta\overset{2}{g}_{00}-\frac{1}{2}\Delta(\delta^{kl}\overset{2}{g}_{kl})\right]\delta_{ij} \tag{3.6.167}$$

将上面三式代入方程(3.6.161)，得

$$\frac{1}{2}\Delta\overset{2}{g}_{00}+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\Delta\overset{2}{g}_{00}+\frac{1}{2}\Delta(\delta^{kl}\overset{2}{g}_{kl})\right)=-8\pi G\overset{0}{T}_{00} \tag{3.6.168a}$$

$$\frac{1}{2}\Delta\overset{3}{g}_{i0}=-8\pi G\overset{1}{T}_{0i} \tag{3.6.168b}$$

$$\frac{1}{2}\Delta\overset{2}{g}_{ij}+\frac{1}{4}\Delta\overset{2}{g}_{00}-\frac{1}{4}\Delta(\delta^{kl}\overset{2}{g}_{kl})=-8\pi G\overset{2}{T}_{ij} \tag{3.6.168c}$$

由方程(3.6.168a)、(3.6.168b),得

$$-\Delta\varphi+\frac{1}{2}(+\Delta\varphi-3\Delta\varphi)=-8\pi G\overset{0}{T}_{00}$$

$$\frac{1}{2}\Delta\zeta_i=-8\pi G\overset{1}{T}_{0i} \qquad (3.6.169)$$

即

$$\nabla\cdot\nabla\varphi=4\pi G\overset{0}{T}_{00} \qquad (3.6.170)$$

$$\nabla\cdot\nabla\zeta_i=-16\pi G\overset{1}{T}_{0i} \qquad (3.6.171)$$

至于方程(3.6.168c),则是多余的。令

$$\boldsymbol{E}_g=\nabla\varphi \qquad (3.6.172)$$

注意到 $\overset{0}{T}_{00}$是物质密度,则方程(3.6.171)可写成

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}_g=4\pi G\rho \qquad (3.6.173)$$

这个方程类似于电磁学中的库仑定律。因此,我们可将 $\boldsymbol{E}_g$ 称为引力场强度(类似于电磁学中的电场强度),将 ρ 称为引力荷密度(类似于电磁学中的电荷密度)。如果引力场是稳恒态的,则必有

$$\nabla\times\boldsymbol{E}_g=0 \qquad (3.6.174)$$

实际上,根据方程(3.6.172),可直接推出方程(3.6.174)。

我们再来考察方程(3.6.171),它实际上可写成

$$\nabla^2(\zeta_i)=-16\pi G\overset{1}{T}_{0i} \qquad (3.6.175)$$

注意到 $\overset{1}{T}_{0i}$表示物质流密度,即引力荷流密度(类似于电流密度 j_i),因此,上式可写成

$$\nabla^2\boldsymbol{\zeta}=-16\pi G\boldsymbol{j}_g \qquad (3.6.176)$$

其中 $\boldsymbol{j}_g$ 表示引力荷流密度(实际上就是单位时间垂直通过单位面积的引力荷)。令

$$\boldsymbol{H}_g=\nabla\times\boldsymbol{\zeta} \qquad (3.6.177)$$

由于

$$\nabla\times\boldsymbol{H}_g=\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{\zeta})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{\zeta})-\nabla^2\boldsymbol{\zeta} \qquad (3.6.178)$$

假定场是稳恒态的,则 $\nabla\cdot\boldsymbol{\zeta}=0$。于是

$$\nabla\times\boldsymbol{H}_g=-\nabla^2\boldsymbol{\zeta} \qquad (3.6.179)$$

将上式代入方程(3.6.176),得

$$\nabla \times \boldsymbol{H}_g = 16\pi G \boldsymbol{j}_g \qquad (3.6.180)$$

又由方程(3.6.177),得

$$\nabla \cdot \boldsymbol{H}_g = 0 \qquad (3.6.181)$$

将方程(3.6.173)、方程(3.6.174)、方程(3.6.180)以及方程(3.6.181)合写如下

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{E}_g &= 4\pi G\rho \\ \nabla \times \boldsymbol{E}_g &= 0 \\ \nabla \times \boldsymbol{H}_g &= 16\pi G \boldsymbol{j}_g \\ \nabla \cdot \boldsymbol{H}_g &= 0 \end{aligned} \qquad (3.6.182)$$

上面的方程组就是准确到量级 v^3/r^2 的稳恒态下的爱因斯坦场方程,其中 $\boldsymbol{H}_g$ 由 $\boldsymbol{j}_g$ 激发,或者说由矢量场 $\boldsymbol{\zeta}$ 激发,因而称之为引力磁场,类似于电磁学中的磁场强度。这个方程与稳恒态下的麦克斯韦方程极为类似。这就使我们有足够的理由确信,爱因斯坦场方程不仅包含了引力场(即牛顿引力)效应,而且隐含着引力磁效应。这就是说,一个运动的粒子(或质体)不仅产生引力效应,而且会产生引力磁效应:当一个引力荷(即物质)在引力磁场中运动时,它将发生偏转,正如电荷在磁场中运动时会发生偏转一样。科学家正在利用多种实验手段检验引力磁效应(Ciufolini, Pavlis, 2004; Ciufolini et al., 2006; Soffel et al., 2008)。

第 4 章

相对论重力测量

重力测量的一个基本任务是确定地球形状以及地球外部重力场。在物理大地测量学中，确定地球形状的传统做法是采用重力测量联合水准测量方法。从近代空间大地测量的发展来看，可以直接采用 GPS 测量手段确定地球形状。但为了确定地球外部重力场，重力测量或与之相关的测量(例如，通过测量卫星轨道的摄动求解重力场)是不可缺少的。一个重要的原因是地球质量的密度分布是未知的，不可能通过对密度的积分直接求定地球外部重力场。如 1.1.2 节所述，司托克斯定理表明(Stokes，1845)，假定地球表面 $\partial\Omega$ 是已知的，并且知道了 $\partial\Omega$ 上的重力位或重力，则可唯一地确定地球外部重力场(这里假定地球自转角速度已知)。因此，从理论上来说，如果测定了 $\partial\Omega$ 上的重力或重力位，那么，根据司托克斯定理，就可以唯一地确定地球外部重力场了。在实际应用中，利用重力位求解外部重力场比较容易，然而重力位却难以直接观测。为此，Jeffreys(1957)曾经讨论过将重力边值问题改化为重力位边值问题的方法。但这种方法有一个缺陷，就是在从重力边值改化为重力位边值的过程中不可避免地引入了误差(Jeffreys，1970)。

引入相对论等频大地水准面的概念可以解决上述不足(Shen

et al.,1993a;金标仁,申文斌,1994;申文斌等,2004a)。从理论上来说,可以用频移观测方法直接(观测)确定地球表面 $\partial\Omega$ 上的重力位,从而通过解边值问题确定地球外部重力场。

以往的重力测量理论都是建立在牛顿引力论基础上的。按广义相对论观点,采用牛顿引力理论,存在一个相对量级为 $10^{-8} \sim 10^{-9}$ 的误差(参见 3.5.6 节),也即误差达到微伽量级。目前的高精度重力仪(以牛顿引力理论为基础)已达到 0.01 甚至 0.001 微伽级的精度(Xu et al.,2000;孙和平,2004),因此,若不考虑相对论影响,其精度高于微伽级的重力测量几乎是没有意义的,除非只对时变重力部分感兴趣。

4.1 基本概念及度量标准

4.1.1 基本概念

经典重力测量的基础是牛顿引力定律和牛顿第二运动定律。按照经典理论,空间和时间都是绝对的,选定一个长度标准以及时间标准之后,它们对任何情形都适用。但在广义相对论框架之下,情形有所不同。比如,在 A 和 B 两个不同的地点测量重力,由于长度标准和时间标准随空间位置的不同而变(假定存在引力场),对所测定的量的评价就有所不同。这就意味着,在 A 和 B 两点测得的重力并不是绝对的。A 点的重力值是按 A 点的度量标准来实现的,B 点的重力值是按 B 点的度量标准来实现的。只有把它们转化到具有某个“公共标准”的系统之后,比较它们的值才有意义(详细讨论见后文)。这就给我们提出一个问题:必须建立一个公共的标准系统,所有的观测量都必须转化到这个系统之中。否则,绝对观测量往往是没有意义的。比如,把一个普通的绝对重力仪放在自由降落的升降机中,欲问某一瞬间重力仪所在位置的重力是多少?显然,重力仪所指示的结果是零(因为重力与惯性力抵消了),但实际上重力并非为零。如果以重力仪所指示的零结果作为问题的解答显然是错误的。但如果把这个“零观测结果”转化到某个公共系统之中,则可以得到正确的

答案。

由于时间度量和长度度量是最基本的两种度量，因此，我们首先规定这两种度量的公共标准（广义相对论框架之中）。

4.1.2　时间标准

时间度量是靠时钟的守时来度量的。按照相对论的观点，时钟的运行速率不仅与时钟的运动速度有关（即时钟是否处于运动状态），而且与时钟所在位置的引力位有关。由于地球形状不规则，加之引力场分布极不均匀，因此，一般说来，位于地球表面两点的时钟的运行速率不会相同。原因有二：其一是由于地球自转运动，两个时钟的运动速度不同（一般情形）；其二是两个时钟所在位置的引力位不同。但我们可以设想在无穷远处存在一个"理想时钟"，这个时钟既不受地球自转以及公转的影响，也不受引力或引力位的影响（在无穷远处引力和引力位均为零）。由于无穷远处的度规是闵可夫斯基度规 $\eta_{\mu\nu}$，因此静止在无穷远处的时间间隔 dt_0 就是原时 $d\tau$。采用原时表示

$$d\tau^2 = -\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = dt_0^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

$$\frac{d\tau^2}{dt_0^2} = 1 - v^2 = 1 \tag{4.1.1}$$

其中用到了"静止条件 $v = 0$"，因此

$$dt_0 = d\tau \tag{4.1.2}$$

再考虑静止在地面的时钟的守时，假定其时间间隔为 dt。由于

$$d\tau^2 = -g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \tag{4.1.3}$$

按照后牛顿近似（参见 3.6.2 节，方程(3.6.81)）

$$\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 = -g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{dt} = -g_{00} - 2g_{i0}v^i - g_{ij}v^iv^j$$

$$= 1 + (2\varphi - v^2) + 2(\varphi^2 + \psi - 2\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\zeta} + \varphi v^2) \tag{4.1.4}$$

因此，准确到 v^4，有

$$\frac{d\tau}{dt} = 1 + \left(\varphi - \frac{1}{2}v^2\right) + \left(\frac{1}{2}\varphi^2 + \psi - 2\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\zeta} + \frac{3}{2}\varphi v^2 - \frac{1}{8}v^4\right) \tag{4.1.5}$$

其中

$$v = r\omega\sin\theta \tag{4.1.6}$$

是时钟在地心准惯性(球面)参考系中的运动速度,ω 是地球自转角速度,r 是时钟至地心的距离,θ 是余纬(极角)。因此,说无穷远处时钟静止,是相对地心准惯性参考系而言的。方程(4.1.5)中其他量的意义见3.6.2节。将方程(4.1.2)代入方程(4.1.5),即可得到理想时钟的守时 $dt_0 \equiv \tau$ 与地面时钟的守时 dt 之间的关系。另外,再次强调,后牛顿近似并非在牛顿力学的意义上加进一些改正,而是广义相对论框架下的一种近似处理方法。

考察方程(4.1.5)不难发现,等号右边的第一项是经典项,第二项是量级为 v^2 的项,第三项是量级为 v^4 的项。如果忽略后面的两个括号项,则得到 $dt = d\tau$,回到了牛顿的时间观。就地面时钟而言,由于 $v \sim 10^{-6}$(光速单位制),因此,可以将方程(4.1.5)等号右边的最后一个括号项略去。故有

$$\frac{d\tau}{dt} = 1 + \varphi - \frac{1}{2}v^2 \tag{4.1.7}$$

或将方程(4.1.2)代入上式,得

$$dt_0 = \left(1 + \varphi - \frac{1}{2}v^2\right)dt \tag{4.1.8}$$

φ 还可以近似地用圆球位代替,从而

$$\begin{aligned} dt_0 &= \left(1 - \frac{GM}{r} - \frac{1}{2}v^2\right)dt \\ &= \left(1 - \frac{GM}{r} - \frac{1}{2}r^2\omega^2\sin^2\theta\right)dt \end{aligned} \tag{4.1.9}$$

其中用到了方程(4.1.6),M 是地球质量。

我们来估算一下地球表面时(即地球表面的时钟的守时)与理想时(即理想时钟的守时)之间的差异。假定有一延续过程 τ,用单位时间 $dt_0 \equiv 1$ 来度量,则 τ 的理想时为

$$T_0 = \frac{\tau}{dt_0} \equiv \tau(\text{秒}) \tag{4.1.10}$$

对于同样的延续过程 τ,用单位时间 dt 来度量,则地球表面时为(基于方程(4.1.9))

$$T = \frac{\tau}{\mathrm{d}t} = \frac{\tau}{\mathrm{d}t_0}\frac{\mathrm{d}t_0}{\mathrm{d}t} = \tau\left(1 - \frac{GM}{r} - \frac{1}{2}v^2\right) \qquad (4.1.11)$$

假定时钟位于赤道上(在上式中取 $r = R = 6378\mathrm{km}$),注意光速单位制,则有

$$T \approx \tau(1 - 10^{-9} - 10^{-12}) \approx \tau(1 - 10^{-9}) \qquad (4.1.12)$$

或写成

$$\left|\frac{T - \tau}{\tau}\right| = 10^{-9} \qquad (4.1.13)$$

目前原子钟的精度远高于 10^{-9},因此,这一效应必须考虑。

方程(4.1.11)表明,位于地球表面的时钟要比理想时钟的运行速率慢。方程(4.1.9)则给出了地面单位时与理想单位时之间的关系,即理想时间尺度(标准)短于地面时间尺度(标准)。我们将以理想时 $\mathrm{d}t_0$ 为公共标准,将地面时 $\mathrm{d}t$ 转化为理想时 $\mathrm{d}t_0$。粗略一点说,时间变换关系可由方程(4.1.11)给出,准确到 v^2 量级。更精确的时间变换(准确到 v^4)要采用方程(4.1.5),这些问题将在 4.3 节详细讨论。

4.1.3　长度标准

由于引力的存在,一个量杆 L 沿不同的方向放置会有变化。将地球引力场设想为两部分组成:一部分是主项,由均质圆球(质量为地球质量)产生,其度规是 Schwarzschild 度规 $g_{\mu\nu}$;另一部分是扰动项,由真实地球密度与均质地球密度之差构成,其度规为 $h_{\mu\nu}$。显然,$h_{\mu\nu}$ 对尺度的影响远小于 Schwarzschild 度规 $g_{\mu\nu}$ 的影响。按 Schwarzschild 度规,量杆沿横向(即与球面相切方向)放置时不发生变化,记为 L,它实际上是量杆放置在无穷远处时的长度 L_0;沿径向(即地心矢径方向)放置时发生收缩效应,记为 L_r。L_r 与 L_0 之间有如下关系(参见3.5.6 节)

$$L_r = \left(1 - \frac{GM}{r}\right)L_0 \qquad (4.1.14)$$

Schwarzschild 度规没有考虑地球的自转。由于地球的自转运动,横向放置的量杆 L 要发生洛伦兹收缩,径向放置的量杆没有此效应。

就横向放置的量杆而言，它不受引力影响，但具有洛伦兹收缩，其收缩的大小取决于横向放置的位置以及方位：当一个量杆 L 沿经度方向（与纬度圈相切方向）放置时，洛伦兹收缩效应最大，其长度记为 L_λ；当量杆 L 沿纬度方向（与子午圈相切方向）放置时，没有洛伦兹收缩效应，其长度记为 L_θ。假定在无穷远处有一静止量杆 L_0，可以把它看做理想的长度或标准长度，因为它不受引力以及地球运动的影响。于是，沿纬度方向和经度方向横向放置的量杆 L_θ 和 L_λ 与标准长度 L_0 之间的关系可表示成（准确到 v^2）如下形式：

$$L_\theta = L_0 \tag{4.1.15a}$$

$$L_\lambda = \sqrt{1 - v^2}L_0 \approx \left(1 - \frac{1}{2}v^2\right)L_0 \tag{4.1.15b}$$

其中 v 由方程（4.1.6）给出。

沿径向放置的量杆不受地球旋转的影响，只受引力作用，因此，量杆沿径向放置时，其长度 L_r 与标准长度 L_0 之间由下式决定（参见3.5.6节）

$$L_r = \left(1 - \frac{GM}{r}\right)L_0 \tag{4.1.16}$$

方程（4.1.15a）、（4.1.15b）和方程（4.1.16）给出了取 L_0 为标准长度时的度量结果（分别沿纬向、经向和径向）。若以 L_θ 为公共标准长度，上述方程仍然有效，只需将 L_0 换成 L_θ 即可。若以 L_λ 为标准长度，则有

$$L_\theta = (1 + \frac{1}{2}v^2)L_\lambda \tag{4.1.17a}$$

$$L_r = (1 - \frac{GM}{r} + \frac{1}{2}v^2)L_\lambda \tag{4.1.17b}$$

下面我们估算一下由于量杆所放置的位置的不同而导致的测量误差。为简明记，将地球设想为半径为 R 的圆球。在相对论出现以前，无论沿哪个大圆测量，认为结果是一样的。按相对论观点，测量结果将有差异。首先考虑沿地球赤道用量杆 L 度量，这时不存在引力效应，只存在由于地球自转运动而引起的洛伦兹收缩效应。度量结果是

$$p = 2\pi RL \ (L \text{ 作为单位 } 1) \tag{4.1.18}$$

若用 L_0 来度量，结果则为（注意：v^2 的计算应采用光速单位）

$$p_0 = p - \frac{1}{2}v^2 p \approx p - \frac{1}{2} \times (2 \times 10^{-12}) \times 4 \times 10^4 \mathrm{km}$$
$$= p - 4 \times 10^{-2} \mathrm{mm} \tag{4.1.19}$$

结果表明，即使度量地球一周，由于洛伦兹收缩效应而带来的影响也是微不足道的。因此，以大地测量为目的，这一影响可以不予考虑。

下面考虑由径向度量带来的影响。假定沿地球径向从 $r = R$ 度量到 $r = R + H$。用 L_0 来度量，其结果记为 D。若用地面量杆 L_r 来度量，其结果为

$$D_r = \frac{D}{L_r} = \frac{D}{L_0}\left(1 + \frac{GM}{r}\right) \approx D + 10^{-9} D \tag{4.1.20}$$

其中取 $L_0 = 1$。

若取地球典型长度 $D = 1 \times 10^4 \mathrm{km} = 1 \times 10^9 \mathrm{cm}$（这也是人造地球卫星与地心距离的典型值），则

$$D_r = D + 1\mathrm{cm} \tag{4.1.21}$$

实际上，由方程(4.1.20) 可以得到相对误差

$$\left|\frac{D_r - D}{D}\right| = 10^{-9} \tag{4.1.22}$$

因此，当（相对）精度要求达到 10^{-9} 时，需要考虑径向引力收缩效应。由于这一效应本身就比较小，因此，由地球不规则部分（即扰动部分）引起的收缩效应可以完全忽略。由估计式(4.1.22) 可以看出，对于低轨卫星的跟踪测距来说，无需考虑相对论影响（仅就距离度量而言）；对于高轨卫星（$> 10^4$km 的高度）的测距或地月测距来说，要想获得高精度的有效测量数据，就必须考虑相对论效应。

至此，我们给出了时间标准 dt_0 和长度标准 L_0，它们是假想的位于无穷远处的单位时间秒长和单位空间长度。地球表面的单位时间秒长以及单位空间长度分别由方程(4.1.8) 以及方程(4.1.15a) ~ (4.1.16) 给出。地球表面的单位空间长度必须事先约定，因为沿不同的方向放置，其度量结果不同。

4.1.4　研究方法

严密的相对论重力测量理论需要在四维时空中进行，同时利用

爱因斯坦场方程(代替牛顿引力场方程)。但这样一来,不仅处理起来极为复杂,而且也很难实际应用。为此,我们将采用简化模型。由4.1.3节的分析,就确定地球几何形状来说,由于径向尺度收缩效应在小于10^4km的尺度上所带来的影响不超过1cm,因此,就目前确定地球形状的精度要求而言,我们仍然可以采用欧几里得几何学。这就意味着,经典的测量方法可以采用。在考虑引力或重力的作用时,以后牛顿近似处理方法为基础。后牛顿近似是广义相对论框架下的一种处理手段,可以达到任意所需要的精度要求。在3.5.6节以及3.6.2节已经指出,在地球表面,相对论效应的影响量级可达到微伽级。在本书中,我们是在广义相对论框架下研究重力测量问题,计算处理采用后牛顿近似,所有的计算方法(例如微积分运算等)仍然是在通常的意义下完成的。

4.2 绝对重力测量和相对重力测量

4.2.1 引力与重力

引力是一个质体产生的作用于电中性粒子的长程作用力,该质体称为引力源。在牛顿理论中,引力效应与粒子的运动以及引力源的运动无关,引力场可用一个标量函数V(V称为引力位)来描述。确切地说,只要给定了整个空间的标量函数$V(\boldsymbol{x},t)$,即可求出在任意时刻t任意空间点(x,y,z)处的引力$\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}) = \nabla V = (\partial^i V)\boldsymbol{e}_i$,其中$\boldsymbol{e}_i$是基矢。

但在广义相对论中,引力效应与粒子以及源的运动状态有关,正如同在电磁理论中,电磁作用与场源以及实验粒子的运动状态有关一样。若采用后牛顿近似,引力场需要用5个标量函数(第一引力位,第二引力位以及具有3个分量的矢量位)来描述。因此,在广义相对论中,引力分量$\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}$要比牛顿理论中的引力分量多得多。看起来$\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}$有$(4\times4\times4=)64$个分量,但由于$\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}$关于指标$\mu$和$\nu$的对称性,即$\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}=\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\mu}$,因此,独立的分量个数只有40个,此因$64-4\times(3+2+1)=40$。在某些特殊情况下,独立分量个数更少。比如,若

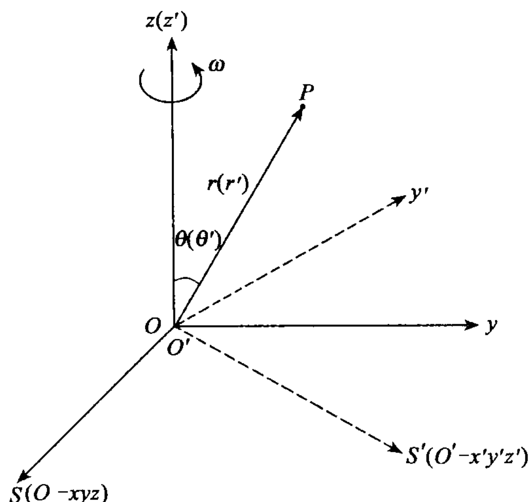


图 4.2.1　S 为地心准惯性系，S' 为地心旋转坐标系

采用 Schwarzschild 度规或 Robertson 度规（此即意味着所考虑的场是稳恒球对称场），独立分量个数只有 13 个（参见 3.5.1 节和 3.5.2 节，特别是方程(3.5.9)）。

重力是附加的概念。在牛顿理论中，它是引力与离心力的合力。离心力取决于参考系的选取。比如，在地固质心参考系中，存在离心力场，但在地心准惯性参考系中，不存在离心力场，但在地心旋转坐标系中存在离心力场，如图4.2.1 所示。因此，在广义相对论中，一般不讨论重力，因为其中的一部分与参考系联系在一起。但在实际测量中，我们测定的量往往包含了参考系效应。因此，有必要讨论参考系之间的转换。参考系一经变换，度规张量 $g_{\mu\nu}$ 就发生变化。前面曾经指出（参见3.1.3 节），度规 $g_{\mu\nu}$ 具有引力位特征，因此，$g_{\mu\nu}$ 也可以认为具有重力位特征。因为，假如 $g_{\mu\nu}$ 是通常意义下的地球引力位，那么，经过一个随时间变化的坐标旋转变换（旋转角速度矢量取地球旋转矢量）之后，$g_{\mu\nu}$ 就变成重力位了。为了看清问题的本质，下面以 Schwarzschild 度规为例来讨论在坐标变换下 $g_{\mu\nu}$ 的变化规律。

考虑无旋转均质圆球产生的引力场。这时，场的性质由

Schwarzschild 度规来描述(见 3.5.1 节),原时间隔在静止球面坐标系下可表述为

$$d\tau^2 = \left(1 - 2\frac{GM}{r}\right)dt^2 - \left(1 - 2\frac{GM}{r}\right)^{-1}dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\lambda^2 \tag{4.2.1}$$

假定将上述坐标系记为 S,我们考虑在旋转球面坐标系 S' 中的度规形式。不失一般性,假定 S' 的原点与 S 的原点重合,并且以恒定的角速度 ω 相对 S 旋转。假定 P 点在 S 系中的坐标是(t,r,θ,λ),那么,在 S' 系中的坐标可记为(t',r',θ',λ')。显然,r' 和 θ' 分别与 r 和 θ 相等,因为当量杆沿 r 和 θ 的方向(即径向和纬向)放置时,它不受(地球)旋转运动的影响,即有

$$r' = r \tag{4.2.2a}$$

$$\theta' = \theta \tag{4.2.2b}$$

λ' 随时间而变,由下式给出

$$\lambda' = \lambda - \omega t' \tag{4.2.3}$$

唯有坐标时 t 与 t' 之间的变换关系较难以确定。假定在 S 系中考察,P 点的时钟静止,那么,在 S' 系中考察,P 点的时钟就以速度 $v = -(r\sin\theta)\omega$ 运动。因此,根据狭义相对论,在 S' 系看来,坐标时 t 要比坐标时 t' 走得慢一些。不过,反过来看,即在 S 系看来,坐标时 t' 要比坐标时 t 走得慢一些。于是,我们遇到了一个两难问题:根据洛伦兹变换,一方面有

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}t = \frac{1}{\sqrt{1 - r^2\omega^2\sin^2\theta}}t \tag{4.2.4}$$

另一方面,又有

$$t = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}t' \tag{4.2.5}$$

为了解决这一困境,假定在 S' 系考察,有

$$t' = kt \tag{4.2.6}$$

由于对称性,在 S 系中考察,必有

$$t = kt' \tag{4.2.7}$$

由式(4.2.6) 和式(4.2.7) 得

$$t' = k^2 t' \tag{4.2.8}$$

由于 t' 任意，因此 $k = \pm 1$。取有意义的值 $k = 1$，则有

$$t' = t \tag{4.2.9}$$

将变换方程(4.2.2a) ~ (4.2.9)写在一起，得

$$t' = t \tag{4.2.10a}$$

$$r' = r \tag{4.2.10b}$$

$$\theta' = \theta \tag{4.2.10c}$$

$$\lambda' = \lambda - \omega t \tag{4.2.10d}$$

需要指出，就旋转参考系之间的变换而言，Möller(1972)也给出了上述变换方程。将方程(4.2.10a) ~ (4.2.10d)代入方程(4.2.1)，得

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\tau'^2 \equiv \mathrm{d}\tau^2 &= \left(1 - \frac{2GM}{r'}\right)\mathrm{d}t'^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r'}\right)^{-1}\mathrm{d}r'^2 \\ &\quad - r'^2\mathrm{d}\theta'^2 - r'^2\sin^2\theta'(\mathrm{d}\lambda' + \omega\mathrm{d}t')^2 \\ &= \left(1 - \frac{2GM}{r'} - r'^2\omega^2\sin^2\theta'\right)\mathrm{d}t'^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r'}\right)^{-1}\mathrm{d}r'^2 \\ &\quad - r'^2\mathrm{d}\theta'^2 - r'^2\sin^2\theta'\mathrm{d}\lambda'^2 - 2r'^2\omega\sin^2\theta'\mathrm{d}\lambda'\mathrm{d}t' \end{aligned} \tag{4.2.11}$$

比较方程(4.2.11)与方程(4.2.1)即可看出，在旋转坐标系 S' 中，时空间隔表示形式多出了一些项，其中交叉项 $\mathrm{d}\lambda'\mathrm{d}t'$ 的出现表示 λ' 与 t' 有关。为了应用方便，我们将旋转坐标系 S' 的“撇”取消，从而得到

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\tau^2 &= \left(1 - \frac{2GM}{r} - r^2\omega^2\sin^2\theta\right)\mathrm{d}t^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2 \\ &\quad - r^2\mathrm{d}\theta^2 - r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\lambda^2 - 2r^2\omega\sin^2\theta\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{4.2.12}$$

需记住上述方程中的所有坐标量都是在旋转坐标系中量取的。当然，G, M, ω 等均为常数(标量)，与坐标系变换无关。

在地心准惯性系 S 中考察，$g_{\mu\nu}$ 由方程(4.2.1)给出，由此构造出的 $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$ 只具有引力特性。但在旋转坐标系 S' 中考察，$g_{\mu\nu}$ 由方程(4.2.11)给出，由此构造出的 $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$ 不仅包含了引力作用，而且还包含了离心力作用。这一点通过比较方程(4.2.1)与方程(4.2.11)的

g_{00} 项（后一方程中 g_{00} 多出 $r^2\omega^2\sin^2\theta'$ 一项）即可看出。如果我们继续构造黎曼张量 $R_{\mu\nu\alpha}{}^{\beta}$ 就会发现，无论选用什么参考系，对 $R_{\mu\nu\alpha}{}^{\beta}$ 没有任何影响（参见 Shen 1996），这时，那些起源于由于参考系的选取不同而有所不同的效应，诸如离心力等，均消失了。换言之，参考系的选取不影响空间本身的内禀性质。这也意味着，参考系的选取从本质上不影响引力效应，但会带来附加影响，诸如离心力的影响等。因此，我们说引力具有本质特性，而重力则是附加上去的概念。

若将地球视为旋转的均质圆球，可采用 Kerr 度规（见3.5.2节）。按 Kerr 度规，在地心无旋转参考系（即地心准惯性参考系）中考察

$$d\tau^2 = \left(1-\frac{2GM}{r}\right)dt^2 - \left(1-\frac{2GM}{r}\right)^{-1}dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\lambda^2 + GJ\sin^2\theta d\lambda dt \tag{4.2.13}$$

其中 J 是地球自转角动量，可表示成（参见 3.6.3 节，方程（3.6.153））

$$J = \frac{2}{5}MR^2\omega \tag{4.2.14}$$

同样，将变换式（4.2.10）代入方程（4.2.13）可得到地心旋转参考系 S' 中的表示式

$$d\tau'^2 \equiv d\tau^2 = \left(1-\frac{2GM}{r'}\right)dt'^2 - \left(1-\frac{2GM}{r'}\right)^{-1}dr'^2 - r'^2d\theta'^2 - r'^2\sin^2\theta'(d\lambda'+\omega dt')^2 + GJ\sin^2\theta'(d\lambda'+\omega dt')dt' \tag{4.2.15}$$

$$= \left(1-\frac{2GM}{r'} - r'^2\omega^2\sin^2\theta' + GJ\omega\sin^2\theta\right)dt'^2 - \left(1-\frac{2GM}{r'}\right)^{-1}dr'^2 - r'^2d\theta'^2 - r'^2\sin^2\theta' d\lambda'^2 - (2r'^2\omega\sin^2\theta' - GJ\omega\sin^2\theta')d\lambda' dt' \tag{4.2.16}$$

或者将“撇”取消，写成

$$d\tau^2 = \left(1-\frac{2GM}{r} - r^2\omega^2\sin^2\theta + GJ\omega\sin^2\theta\right)dt^2 - \left(1-\frac{2GM}{r}\right)^{-1}dr^2 - (2r^2\omega\sin^2\theta - GJ\omega\sin^2\theta)d\lambda dt - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\lambda^2 \tag{4.2.17}$$

Kerr 度规与 Schwarzschild 度规的区别在于，Kerr 度规考虑了引力源的自转对引力场的贡献，而 Schwarzschild 度规将引力源视为无旋转的，自然也就没有考虑自转对场的贡献。

将地心无旋转参考系中的 Kerr 度规(4.2.13) 与旋转参考系中的 Schwarzschild 度规(4.2.12) 进行比较就会发现，在广义相对论中，一个静止参考系中旋转的天体(或恒星) 产生的引力效应，与一个在旋转参考系中考察一个假定相对宇宙空间无旋转的天体产生的引力效应并不相同。也就是说，是天体旋转还是参考系旋转，二者并不等价。

实际上，地球并不是均匀圆球，而是密度分布不均匀的复杂的形体(大致可认为是旋转椭球体)。为此，我们需要采用后牛顿近似法求解。时空间隔可写成

$$d\tau^2 = -g_{00}dt^2 - 2g_{0i}dtdx^i - g_{ij}dx^i dx^j \qquad (4.2.18)$$

将方程(3.6.6) 代入上式，保留到 $\overset{4}{g}_{\mu\nu}$(即 v^4 量级)，得

$$d\tau^2 = -(-1 + \overset{2}{g}_{00} + \overset{4}{g}_{00})dt - 2\overset{3}{g}_{i0}dtdx^i - (\delta_{ij} + \overset{2}{g}_{ij} + \overset{4}{g}_{ij})dx^i dx^j \qquad (4.2.19)$$

取笛卡尔坐标系，$x^0 = t,\ x^1 = x,\ x^2 = y,\ x^3 = z$，并将方程(3.6.55) ~ (3.6.67) 代入方程(4.2.19) 之中，得

$$\begin{aligned} d\tau^2 = {} & (1 + 2\varphi + 2\varphi^2 + 2\psi)dt^2 - 2\zeta_1 dtdx - 2\zeta_2 dtdy \\ & - 2\zeta_3 dtdz - (1 - 2\varphi)(dx^2 + dy^2 + dz^2) \end{aligned} \qquad (4.2.20)$$

其中，牛顿位 φ、第二引力位 ψ 以及矢量位 ζ_i 的具体表达式分别见方程(3.6.57)、方程(3.6.67) 以及方程(3.6.61)，同时，在方程(4.2.20) 中略去了 $\overset{4}{g}_{ij}dx^i dx^j$ 项，因为在方程(4.2.19) 两边同除以 dt^2 之后，这一项具有 v^6 量级。

表达式(4.2.20) 是地心准惯性系 S 中考察的结果。今将它变换到地固质心参考系 S' 中。

S' 以角速度 ω 绕 S 旋转(Z 与 Z' 重合，$\lambda' = \lambda - \omega t$)，如图 4.2.1 所示。两个参考坐标系之间的变换方程如下

$$t' = t$$

$$x' = r'\cos\lambda' = r\cos(\lambda - \omega t)$$

$$
\begin{aligned}
&= r\cos\lambda\cos\omega t + r\sin\lambda\sin\omega t \\
&= x\cos\omega t + y\sin\omega t \\
y' &= r\sin(\lambda - \omega t) = y\cos\omega t - x\sin\omega t \\
z' &= z
\end{aligned}
\tag{4.2.21}
$$

或写成

$$
\begin{bmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega t & \sin\omega t & 0 \\ 0 & -\sin\omega t & \cos\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}
\tag{4.2.22}
$$

其逆变换为

$$
\begin{bmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega t' & -\sin\omega t' & 0 \\ 0 & \sin\omega t' & \cos\omega t' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}
\tag{4.2.23}
$$

或写成

$$
\begin{aligned}
t &= t' \\
x &= x'\cos\omega t' - y'\sin\omega t' \\
y &= x'\sin\omega t' + y'\cos\omega t' \\
z &= z'
\end{aligned}
\tag{4.2.24}
$$

由此得

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}t &= \mathrm{d}t' \\
\mathrm{d}x &= \cos\omega t'\mathrm{d}x' - \sin\omega t'\mathrm{d}y' - \omega(x'\sin\omega t' + y\cos\omega t')\mathrm{d}t' \\
\mathrm{d}y &= \sin\omega t'\mathrm{d}x' + \cos\omega t'\mathrm{d}y' + \omega(x'\cos\omega t' - y'\sin\omega t')\mathrm{d}t' \\
\mathrm{d}z &= \mathrm{d}z'
\end{aligned}
\tag{4.2.25}
$$

又

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 = {} & \mathrm{d}x'^2 + \mathrm{d}y'^2 + \mathrm{d}z'^2 + \omega^2(x'^2 + y'^2)\mathrm{d}t'^2 \\
& + [-2\omega\cos\omega t'(x'\sin\omega t' + y'\cos\omega t') + 2\omega\sin\omega t'(x'\cos\omega t' \\
& \quad - y'\sin\omega t')]\mathrm{d}t'\mathrm{d}x' \\
& + [2\omega\sin\omega t'(x'\sin\omega t' + y'\cos\omega t') + 2\omega\cos\omega t'(x'\cos\omega t' \\
& \quad - y'\sin\omega t')]\mathrm{d}t'\mathrm{d}y'
\end{aligned}
$$

$$= dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 + \omega^2(x'^2 + y'^2)dt'^2 - 2\omega y'dt'dx' + 2\omega x'dt'dy' \tag{4.2.26}$$

将方程(4.2.24) ~ (4.2.26) 代入方程(4.2.20) 之中,则有

$$\begin{aligned}
d\tau'^2 \equiv d\tau^2 &= [1 + 2\varphi(\boldsymbol{x},t) + 2\varphi^2(\boldsymbol{x},t) + 2\psi(\boldsymbol{x},t)]dt^2 \\
&\quad - 2\zeta_i(\boldsymbol{x},t)dtdx^i - [1 - 2\varphi(\boldsymbol{x},t)](dx^2 + dy^2 + dz^2) \\
&= (1 + 2\varphi' + 2\varphi'^2 + 2\psi')dt'^2 \\
&\quad - 2(\zeta'_1\cos\omega t' + \zeta'_2\sin\omega t')dt'dx' \\
&\quad - 2(-\zeta'_1\sin\omega t' + \zeta'_2\cos\omega t')dt'dy' - 2\zeta'_3dt'dz' \\
&\quad - 2\omega[-\zeta'_1(x'\sin\omega t' + y'\cos\omega t') + \zeta'_2(x'\cos\omega t' \\
&\quad - y'\sin\omega t')]dt'^2 \\
&\quad - (1 - 2\varphi')[dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 + \omega^2(x'^2 + y'^2)dt'^2] \\
&\quad + (1 - 2\varphi')2\omega y'dt'dx' - (1 - 2\varphi)2\omega x'dt'dy' \\
&= [1 + 2\varphi' + 2\varphi'^2 + 2\psi' - \omega^2(x'^2 + y'^2) + 2\omega^2(x'^2 \\
&\quad + y'^2)\varphi' \\
&\quad + 2\omega\zeta'_1(x'\sin\omega t' + y'\cos\omega t') - 2\omega\zeta'_2(x'\cos\omega t' \\
&\quad - y'\sin\omega t')]dt'^2 \\
&\quad - [2(\zeta'_1\cos\omega t' + \zeta'_2\sin\omega t') - 2\omega(1 - 2\varphi')y']dt'dx' \\
&\quad - [2(-\zeta'_1\sin\omega t' + \zeta'_2\cos\omega t') + 2\omega x'(1 - 2\varphi')]dt'dy' \\
&\quad - 2\zeta'_3dt'dz' \\
&\quad - (1 - 2\varphi')(dx'^2 + dy'^2 + dz'^2)
\end{aligned} \tag{4.2.27}$$

其中,φ',ψ',ζ'_i分别是旋转坐标系中的第一牛顿引力位、第二引力位和矢量位。取消"撇"号,则有

$$\begin{aligned}
d\tau^2 &= [1 + 2\varphi - \omega^2(x^2 + y^2) + 2\varphi^2 + 2\psi + 2\omega^2(x^2 + y^2)\varphi \\
&\quad + 2\omega\zeta_1(x\sin\omega t + y\cos\omega t) - 2\omega\zeta_2(x\cos\omega t - y\sin\omega t)]dt^2 \\
&\quad - [2(\zeta_1\cos\omega t + \zeta_2\sin\omega t) - 2\omega y(1 - 2\varphi)]dtdx \\
&\quad - [2(-\zeta_1\sin\omega t + \zeta_2\cos\omega t) + 2\omega x(1 - 2\varphi)]dtdy - 2\zeta_3dtdz \\
&\quad - (1 - 2\varphi)(dx^2 + dy^2 + dz^2)
\end{aligned} \tag{4.2.28}$$

方程(4.2.28) 给出了在地固质心参考系中的时空间隔表示,从而给出了 $d\tau^2$ 在地球引力场中的表达式。这个方程看起来很复杂,但就大地测量应用而言,一般情况下只需要准确到 v^2 量级。这时,方程

(4.2.28) 可简化为

$$d\tau^2 = [1 + 2\varphi - \omega^2(x^2 + y^2)]dt^2 - (1 - 2\varphi)(dx^2 + dy^2 + dz^2) \tag{4.2.29}$$

如果要考虑中心天体的旋转效应,则需采用方程(4.2.28)。下面我们考虑一种简化的形式,即假定中心天体的自转角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 是恒量。根据 3.6.3 节的研究,在准笛卡尔惯性系中,矢量场 $\boldsymbol{\zeta}$ 可写成

$$\boldsymbol{\zeta} = \frac{2G}{r^3}(\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{J}) \tag{4.2.30}$$

其中(参见 3.6.3 节):

$$\boldsymbol{J} = \frac{8\pi}{3}\int_0^R \boldsymbol{\omega} \overset{0}{T}{}^{00} r'^4 dr' = \frac{2R^2M}{5}\boldsymbol{\omega} \tag{4.2.31}$$

是天体的角动量,这里假定了密度 $\overset{0}{T}{}^{00} = \rho$ 为均匀分布。就我们感兴趣的问题而言,由于 ζ_i 本身是 v^3 量级的量,因此,$\boldsymbol{J}$ 可以近似地用方程(4.2.31)代替(即将 $\overset{0}{T}{}^{00}$ 视为均匀分布),这时,$\boldsymbol{J}$ 与 $\boldsymbol{\omega}$ 的方向一致(近似)。

在准笛卡尔惯性系中,时空间隔由方程(4.2.20)给出,重写于下

$$d\tau^2 = (1 + 2\varphi + 2\varphi^2 + 2\psi)dt^2 - 2\boldsymbol{\zeta} \cdot d\boldsymbol{x}dt - (1 - 2\varphi)(d\boldsymbol{x})^2 \tag{4.2.32}$$

将方程(4.2.30)代入方程(4.2.32),得

$$\begin{aligned} d\tau^2 &= (1 + 2\varphi + 2\varphi^2 + 2\psi)dt^2 - \frac{4G}{r^3}(\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{J}) \cdot d\boldsymbol{x}dt \\ &\quad - (1 - 2\varphi)(d\boldsymbol{x})^2 \\ &= (1 + 2\varphi + 2\varphi^2 + 2\psi)dt^2 - \frac{4G}{r^3}\boldsymbol{J} \cdot (d\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{x})dt \\ &\quad - (1 - 2\varphi)(d\boldsymbol{x})^2 \\ &= (1 + 2\varphi + 2\varphi^2 + 2\psi)dt^2 - \frac{4G}{r^3}J(ydx - xdy)dt \\ &\quad - (1 - 2\varphi)(d\boldsymbol{x})^2 \end{aligned} \tag{4.2.33}$$

将上述度规表示转换到地固质心参考系之中,即将变换方程(4.2.24)~(4.2.26)代入方程(4.2.33)之中,注意到

$$
\begin{aligned}
y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y &= (x'\sin\omega t' + y'\cos\omega t')[\cos\omega t'\mathrm{d}x' - \sin\omega t'\mathrm{d}y' \\
&\quad - \omega(x'\sin\omega t' + y'\cos\omega t')\mathrm{d}t'] \\
&\quad - (x'\cos\omega t' - y'\sin\omega t')[\sin\omega t'\mathrm{d}x' + \cos\omega t'\mathrm{d}y' \\
&\quad + \omega(x'\cos\omega t' - y'\sin\omega t')\mathrm{d}t'] \\
&= (x'\sin\omega t' + y'\cos\omega t')(\cos\omega t'\mathrm{d}x' - \sin\omega t'\mathrm{d}y') \\
&\quad - (x'\cos\omega t' - y'\sin\omega t')(\sin\omega t'\mathrm{d}x' + \cos\omega t'\mathrm{d}y') \\
&\quad - \omega(x'\sin\omega t' + y'\cos\omega t')^2\mathrm{d}t' - \omega(x'\cos\omega t' \\
&\quad - y'\sin\omega t')^2\mathrm{d}t' \\
&= y'\mathrm{d}x' - x'\mathrm{d}y' - \omega(x'^2 + y'^2)\mathrm{d}t' \qquad (4.2.34)
\end{aligned}
$$

得

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\tau^2 &\equiv \mathrm{d}\tau'^2 = (1 + 2\varphi' + 2\varphi'^2 + 2\psi')\mathrm{d}t'^2 \\
&\quad - \frac{4G}{r^3}J[y'\mathrm{d}x' - x'\mathrm{d}y' - \omega(x'^2 + y'^2)\mathrm{d}t']\mathrm{d}t' \\
&\quad - (1 - 2\varphi')[(\mathrm{d}\boldsymbol{x}')^2 + \omega^2(x'^2 + y'^2)\mathrm{d}t'^2 - 2\omega y'\mathrm{d}t'\mathrm{d}x' \\
&\quad + 2\omega x'\mathrm{d}t'\mathrm{d}y'] \\
&= [1 + 2\varphi' + 2\varphi'^2 + 2\psi' - \omega^2(x'^2 + y'^2) + 2\varphi'\omega^2(x'^2 + y'^2) \\
&\quad + \frac{4G}{r^3}J\omega(x'^2 + y'^2)]\mathrm{d}t'^2 \\
&\quad - \left[\frac{4G}{r^3}Jy' - 2\omega y'(1 - 2\varphi')\right]\mathrm{d}t'\mathrm{d}x' \\
&\quad - \left[-\frac{4G}{r^3}Jx' + 2\omega x'(1 - 2\varphi')\right]\mathrm{d}t'\mathrm{d}y' - (1 - 2\varphi')(\mathrm{d}\boldsymbol{x}')^2
\end{aligned}
$$

(4.2.35)

带“撇”的量均表示在地固质心参考系中量取。只要记住这一点，可将“撇”号取消。于是，方程(4.2.35)可改写成

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\tau^2 &= \Big[1 + 2\varphi - \omega^2(x^2 + y^2) + 2\varphi^2 + 2\psi \\
&\quad + 2\omega^2(x^2 + y^2)\varphi + \frac{4G}{r^3}J\omega(x^2 + y^2)\Big]\mathrm{d}t^2 \\
&\quad - \left[\frac{4G}{r^3}Jy - 2\omega y(1 - 2\varphi)\right]\mathrm{d}t\mathrm{d}x \\
&\quad - \left[-\frac{4G}{r^3}Jx + 2\omega x(1 - 2\varphi)\right]\mathrm{d}t\mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

$$-(1-2\varphi)(dx^2+dy^2+dz^2) \tag{4.2.36}$$

其中 φ 和 ψ 分别为第一和第二牛顿引力位。

4.2.2 绝对重力测量

我们先考虑最简单的绝对重力测量方法——弹簧法。假定弹簧的倔强系数为 k,那么,根据胡克定律,当弹簧由不受力时的长度 x_0 伸长到受力时的 x 时,有如下方程

$$f=(x-x_0)k \tag{4.2.37}$$

其中 f 是弹簧所受到的拉力。

按牛顿理论,只要 f 恒定,不论弹簧秤沿什么方向放置,弹簧被拉伸的长度是恒定的,因而在刻度尺上的读数与弹簧秤如何放置无关。于是,若在弹簧上悬一质量为 m 的物体,按牛顿理论, m 所在处的重力由下式决定

$$f=mg \tag{4.2.38}$$

其中, g 是重力加速度,也即单位质点所受的重力。于是,由方程(4.2.37)和方程(4.2.38)得到重力

$$g=\frac{f}{m}=\frac{x-x_0}{m}k \tag{4.2.39}$$

现在按广义相对论的观点来考察看有什么变化。如图 4.2.2 所示,假定弹簧 E 静止水平放置时的长度为 x_0,在力 f 作用之下拉伸到长度 x,则方程(4.2.39)仍然成立。当弹簧竖直(即沿地球径向)放置时,不受外力(只受引力)的长度应该是

$$x_0'=\left(1-\frac{GM}{r_0}\right)x_0 \tag{4.2.40}$$

其中 r_0 是地心至弹簧秤的距离。假定水平放置时,在 f 作用下弹簧伸长至 x,那么,在同样大小的力的作用下,竖直放置时,则伸长至

$$x'=\left(1-\frac{GM}{r}\right)x \tag{4.2.41}$$

因此,竖直放置时,在力 f 作用下总的伸长量为

$$x'-x_0'=x-x_0-\left(\frac{GM}{r}x-\frac{GM}{r_0}x_0\right)$$

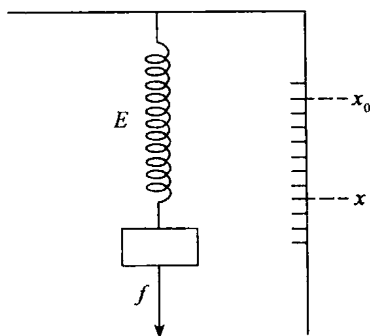


图 4.2.2　弹簧秤原理

$$\approx x - x_0 - \frac{GM}{r_0}(x - x_0)$$

$$= \left(1 - \frac{GM}{r_0}\right)(x - x_0) \tag{4.2.42}$$

在上式两边同乘 k，并顾及 $f = (x - x_0)k$，则有

$$f = \left(1 - \frac{GM}{r_0}\right)^{-1}(x' - x'_0)k \tag{4.2.43}$$

若令

$$f = mg \tag{4.2.44}$$

则

$$g = \left(1 - \frac{GM}{r_0}\right)^{-1}\frac{x' - x'_0}{m}k \tag{4.2.45}$$

在刻度尺上读取 x'_0 以及 x'，则可由方程(4.2.45)求出按相对论观点测得的绝对重力。但由于刻度尺竖直放置时(与横向放置时相比)按因子$(1 - GM/r)$收缩，因此，方程(4.2.45)与方程(4.2.39)完全相同。这就是说，用弹簧秤测定绝对重力，经典理论是可靠的。不过，弹簧秤的精度很低，一般只有几十毫伽(方俊，1961)，作为科学研究，目前已很少应用。下面考虑一种精度较高的方法——自由落体法。

按牛顿理论，自由落体的运动方程可写成

$$\ddot{r} = g \tag{4.2.46}$$

其中 g 是重力加速度。在小邻域之内，可认为 g 是常数。由方程(4.2.46)，经两次积分，得

$$\dot{r} = \dot{r}|_{r=r_0} + gt = v_0 + gt$$

$$r = r_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2 \qquad (4.2.47)$$

r_0 和 v_0 对应于 $t = 0$ 时刻的落体的位置和速度。测定一组 t 和 r，则得到一个方程(4.2.47)。令假定测定了三组数 $t_1, r_1; t_2, r_2; t_3, r_3$，则得到三个方程

$$r_i - r_0 = v_0 t_i + \frac{1}{2} g t_i^2, i = 1,2,3 \qquad (4.2.48)$$

由上边三式得

$$r_2 - r_1 = (t_2 - t_1)\left[v_0 + \frac{1}{2} g (t_2 + t_1)\right]$$

$$r_3 - r_1 = (t_3 - t_1)\left[v_0 + \frac{1}{2} g (t_3 + t_1)\right] \qquad (4.2.49)$$

消去 v_0，即得到

$$g = 2\left(\frac{r_3 - r_1}{t_3 - t_1} - \frac{r_2 - r_1}{t_2 - t_1}\right)(t_3 - t_2)^{-1} \qquad (4.2.50)$$

这个方程给出了按牛顿理论测定出的绝对重力数值。

按广义相对论，在球近似下，在速度为零的瞬时，准确到 v^2 量级，自由落体的运动方程可写成(参见 3.6.2 节，方程(3.6.77))

$$\ddot{r} = -\frac{GM}{r^2} - \frac{2GM}{r}\left(-\frac{GM}{r^2}\right) = g - \frac{2GM}{r} g \qquad (4.2.51)$$

由于 GM/r 是小量，在小邻域内可视为恒量 GM/R，而且在小邻域内也可以认为运动速度接近零，因此，方程(4.2.51)足够精确；于是(令 $r = R$)

$$\ddot{r} = g - \frac{2GM}{R} g \qquad (4.2.52)$$

令

$$g' = g - \frac{2GM}{R} g \qquad (4.2.53)$$

则有

$$\ddot{r} = g' \tag{4.2.54}$$

方程(4.2.54)与方程(4.2.46)具有完全相同的形式，故有

$$g' = 2\left(\frac{r_3 - r_1}{t_3 - t_1} - \frac{r_2 - r_1}{t_2 - t_1}\right)(t_3 - t_2)^{-1} \tag{4.2.55}$$

如果我们将 $\ddot{r}$ 视为重力加速度，也即重力的话，那么，比较方程(4.2.55)和方程(4.2.50)可以看出，用自由落体法测定的绝对重力不论在经典意义上还是在广义相对论意义上都是相同的。实际上，在局部邻域，场可以看做是均匀的，因此，根据等效原理，一切物体均以恒定的加速度下落。这个结论不论是在牛顿理论框架还是广义相对论框架都是正确的。方程(4.2.46)和方程(4.2.54)就是上述陈述的数学表述形式。这就意味着，用自由落体法测定的绝对重力值究竟属于广义相对论还是牛顿理论，无法分辨。如果认为牛顿理论正确，则可认为测定的是牛顿意义下的绝对重力。如果认为广义相对论正确，则可认为是广义相对论意义下的绝对重力。这就是说，即使以广义相对论为基础，用通常意义下的自由落体法测定的重力仍然是有效的。

在不是很严格的意义上，我们可以把上述论证推广，推广到用任意动力法(即考察质体在重力场中的运动形式从而确定重力的方法)测定绝对重力的情形。因为质点在重力场中的运动服从统一的规律，因此，无论采用什么形式的动力法，测定的重力应该是完全相同的(忽略误差影响)。

不过必须注意，虽然用动力法测定的重力可以认为是广义相对论意义下的，但不能把该重力与牛顿重力等同起来。举一个简单的例子便可说明问题。为了讨论问题简单，先忽略离心力的影响，这时重力等同于引力。考虑半径为 R 的均质圆球产生的引力场。按牛顿理论，离球心 $r(r \geqslant R)$ 处的引力(即重力)为

$$g = \frac{GM}{r^2} \tag{4.2.56}$$

其中 M 是均质圆球的引力质量。但按照广义相对论，离球心 r 处的引力(重力)为

$$g_0 = \frac{GM}{r^2} - \frac{2GM}{r}\frac{GM}{r^2} \tag{4.2.57}$$

比较方程(4.2.56)和(4.2.57)可以看出,由广义相对论计算出的重力值要比按牛顿理论计算的值小一些。但由于地球密度分布未知,在地球表面只能通过动力法测定绝对重力(指高精度重力测量),而这种测定方法是通过观测 r_i 和 $t_i(i=1,2,\cdots)$ 来计算重力值的。根据前面的论证,用这种方法测定的重力可以认为是牛顿意义下的,也可以认为是广义相对论意义下的。为了明确起见,今后我们约定,用动力法测定的绝对重力是广义相对论意义下的值。

需要指出,在更严格的意义下,牛顿理论与广义相对论对描述自由落体运动有差异。这时,在地面附近,牛顿描述不能简单地采用方程(4.2.46),因为还有旋转参考系的影响;而广义相对论的描述则需采用方程(3.6.71)(见3.6.2节)。实际上,根据广义相对论,旋转的地球会产生附加的引力磁效应,但按牛顿理论,不存在这一效应。

现在出现了这样一个问题:测定某处的重力(应用动力法)是以当地的量杆(长度标准)和时钟来测定的,由此会产生系统性的差异。比如,设 A 和 B 是地面上不同的两点,具有不同的重力位,则这两处的时钟的运行速率不同(Weinberg,1972;Bjerhammar,1985;Shen et al.,1993a;金标仁,申文斌,1994)。因此,一般说来,由于不同地方的时钟的运行速率不同,从而会影响到对重力值的测定结果。为此,我们来讨论这个问题。

假定 A 和 B 处的牛顿引力位分别为 V_A 和 V_B(取正值),重力位分别为 W_A 和 W_B(重力位是引力位与离心位的和,见4.3.1节),则 A 和 B 两处的时钟的单位秒长可分别表示成(参见3.5.6节)

$$\Delta t_A = (1 - W_A)\Delta t \tag{4.2.58a}$$

$$\Delta t_B = (1 - W_B)\Delta t \tag{4.2.58b}$$

其中,Δt 是时钟静止在无限远处时的单位秒长,W 是牛顿引力位与离心力位之和,均取正值。

量杆竖直放置时,不受地球自转的影响,因而不受离心力的影响。因此,就自由落体法测重力而言,A 和 B 处的单位量杆分别可表示成(参见3.5.6节)

$$L_A = (1 - V_A)L_0 \tag{4.2.59a}$$

$$L_B = (1 - V_B)L_0 \tag{4.2.59b}$$

今以 A 点的时钟和量杆为准，则有

$$\Delta t_B = (1 - W_B)(1 - W_A)^{-1}\Delta t_A \approx (1 - W_B + W_A)\Delta t_A \tag{4.2.60}$$

$$L_B = (1 - V_B)(1 - V_A)^{-1}L_A \approx (1 - V_B + V_A)L_A \tag{4.2.61}$$

因此，假如我们认为在 A 点用自由落体法测定的重力不需修正，那么在 B 点测定的重力值就需要进行修正了。为了估算修正量，假定在 B 点实测的重力值（重力加速度）为 a_B。根据方程(4.2.54)和(4.2.55)，a_B 可表示成

$$a_B = 2\left(\frac{r_3 - r_1}{t_3 - t_1} - \frac{r_2 - r_1}{t_2 - t_1}\right)(t_3 - t_2)^{-1}\bigg|_B \tag{4.2.62}$$

上式等号右边采用符号 $|_B$ 表示用 B 处的时钟和量杆测定的量。将它们转换为 A 处的时钟和量杆测定的量，根据方程(4.2.60)和(4.2.61)，得

$$a'_B = \frac{(1 - V_B + V_A)}{(1 - W_B + W_A)^2}\cdot 2\left(\frac{r_3 - r_1}{t_3 - t_1} - \frac{r_2 - r_1}{t_2 - t_1}\right)(t_3 - t_2)^{-1}\bigg|_B$$

$$\equiv \frac{1 - V_B + V_A}{(1 - W_B + W_A)^2}a_B \tag{4.2.63}$$

其中 a'_B 表示用 A 处的度量标准（量杆和时钟）测定所得到的 B 点的重力值。

由方程(4.2.63)得

$$a'_B \approx (1 - V_B + V_A + 2W_B - 2W_A)a_B$$

$$= [1 - (V_B - V_A) + 2(W_B - W_A)]a_B \tag{4.2.64}$$

在地球附近，1m 的高差所对应的位差（或重力位差）大约 10^{-16}（光速单位，参见 Bjerhammar，1985；Shen et al.，1993a）。假定 A 和 B 两点的高程差为 10km，那么，对应的位差（或重力位差）大约为 $10^4 \times 10^{-16} = 10^{-12}$。于是，由方程(4.2.64)得

$$a'_B = (1 \pm 10^{-12})a_B \tag{4.2.65}$$

设 $a_B = 10\text{ms}^{-2} = 10^3\text{cm}\cdot\text{s}^{-2} = 10^3\text{Gal}$，则

$$a'_B = (1 \pm 10^{-12}) \times 10^3\text{Gal} = 10^3\text{Gal} \pm 10^{-9}\text{Gal}$$

$$= 10^3\text{Gal} \pm 10^{-3}\mu\text{Gal} \tag{4.2.66}$$

这个改正量是目前绝对重力测量的精度难以达到的。况且在大地测

量中，大部分重力数据是通过内插来实现的，而内插误差（大约毫伽级）远远高于上述改正量。因此，以大地测量为目的，前面所说的修正项是不必要的。因此，今后我们约定，用动力法测定绝对重力，以当地测定的值为准。这种约定不会给实际应用带来可察觉的影响。

4.2.3 相对重力测量

相对重力测量是指确定两点之间的重力差值。假定知道了一点 A 的绝对重力值（比如用绝对重力仪测量出了 A 点的值），那么，通过相对重力测量可确定 B 点的重力值，只要测出了 A、B 之间的重力差。现代相对重力测量均采用静力法，不采用动力法，因此，对相对重力仪的要求就不像绝对重力仪那样复杂（需要精密测时和测距装置）。一般地，测定相对重力是采用静力平衡原理。例如，目前广泛使用的拉科斯特重力仪，就是根据静力平衡原理设计的一种金属弹簧重力仪（管泽霖，宁津生，1981），精度可达几个微伽。显然，4.2.2 节的研究已充分说明，由相对重力测量得到的重力差，可以认为是经典意义下的量，也可以认为是广义相对论意义下的量，二者从目前所要求的精度意义上看没有什么区别，即这一结论是近似成立的，也即在 4.2.2 节末尾讨论的意义下成立（严格地说，有微小差别）。对此，下面给出论证。

假定在 A 点和 B 点用绝对重力仪测量了 A 点和 B 点的绝对重力 a_A 和 a_B。以 A 点的度量为准，则 B 点的实际重力应该是（见4.2.2 节）

$$a'_B = [1 - (V_B - V_A) + 2(W_B - W_A)]a_B \tag{4.2.67}$$

但按牛顿理论，应该有

$$a'_B = a_B \tag{4.2.68}$$

假定用相对重力仪测定了 A 与 B 之间的重力差 Δa_{AB}。由于相对重力仪的测定原理基于静力平衡系统，而这个系统的整个体系（包括弹簧和刻度）在引力场中按统一的规律变化。因此，它所指示出来的读数不论按牛顿理论解释还是按广义相对论解释都是正确的。这就意味着，用相对重力仪测量的 A 与 B 之间的重力差可表示成

$$\Delta a_{AB} = a_B - a_A \tag{4.2.69}$$

但按照广义相对论，A 与 B 之间的重力差应该是

$$\begin{aligned}\Delta a'_{AB} &= a'_{B} - a_{A} \\ &= a_{B} - a_{A} - [(V_{B} - V_{A}) - 2(W_{B} - W_{A})]a_{B} \\ &= \Delta a_{AB} - [(V_{B} - V_{A}) - 2(W_{B} - W_{A})]a_{B}\end{aligned} \tag{4.2.70}$$

在上边的方程中，第三个等号右边的第二项显示了由相对重力测量推出的 B 点的值与真正的 B 点的值的差异。不过，在 4.2.2 节已经讨论过，这一差异非常微小，完全可以忽略。比如，由 A 点出发，用相对重力测量历经 10km 高差测定出了 B 点的重力，由此带来的相对论性影响大约只有 $10^{-3}\mu$Gal，这远远小于相对重力测量在历经了这样一个高差所能达到的精度。因此，方程(4.2.70) 中的最后一项实际上是无意义的。这也就意味着，我们可以写出

$$\Delta a'_{AB} = \Delta a_{AB} \tag{4.2.71}$$

这就证实了前面给出的结论：用相对重力仪测量重力差，可以认为是广义相对论意义下的值。

4.2.4　地球的质量

我们把讨论限定在地球的固体和液体部分，先不考虑大气质量。第一个对地球的质量作出精确测定的人是卡文迪西(Cavendish)。为了测出地球的质量，首先必须知道万有引力常数。为了测定万有引力常数，Cavendish(1798) 做了一个实验，通称卡文迪西实验，其基本原理如下所述(参见图 4.2.3)。

两个等质量圆球 A 与刚杆 EE 刚性连接，后者与扭丝 T(呈垂线方向) 固结在一起；两个等质量圆球 B 固定在地面，并使这四个球处在同一水平面之内。假定它们的质量都是 1kg(由国际权度局定义，参见Stöcker,2004)，A 与 B 之间的距离为 l。根据万有引力定律，B 对 A 的吸引力为

$$f_{AB} = \frac{Gm^2}{l^2} \tag{4.2.72}$$

其中，G 是万有引力常数，m 为圆球质量。

假定两个球 A 的悬挂点 E 至 O 的距离为 p，则扭丝 T 受到一力偶作用，力偶的大小为

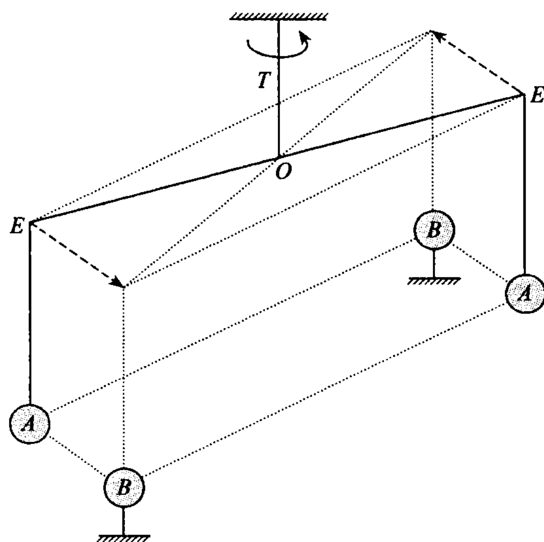


图 4.2.3　测定 G 的原理

$$L = 2f_{BA}p = \frac{2Gm^2}{l^2}p \tag{4.2.73}$$

力偶的（正）方向规定为逆时针方向。假定扭丝的抗扭矩（或抗剪切）系数为 k，那么，在力偶的作用下，扭丝由不受力时的“零状态”变为受力后的 θ 状态，θ 是两个球 A 在另外两个球 B 作用之后偏转原来位置的角度。根据胡克定律，我们可列出如下方程

$$L = k\theta \tag{4.2.74}$$

由方程(4.2.73)和(4.2.74)得

$$\frac{2Gm^2}{l^2}p = k\theta \tag{4.2.75}$$

即

$$G = \frac{l^2 k\theta}{2m^2 p} \tag{4.2.76}$$

上式等号右边都是可测定的量，从而可求出万有引力常数 G。Cavendish(1798)当时测定的结果是 $G = 6.754 \times 10^{-8}\mathrm{cm}^3 \cdot \mathrm{g}^{-1} \cdot$

s^{-2}。采用上述原理测定 G 值的方法称为卡文迪西方法。后来,不少学者(Heyl and Chrzanowski,1942;Zahradnicek,1933;Heyl and Chrzanowski,1942;Rose et al.,1969;Beams, 1971)对 G 进行了测定,所能达到的精度只能取(小数点后)三位,例如,Rose et al. (1969)给出的 G 值如下

$$G = 6.674 \times 10^{-8}\mathrm{cm}^3 \cdot \mathrm{g}^{-1} \cdot \mathrm{s}^{-2} \tag{4.2.77}$$

近代测量值提高了两个数量级,测定的 G 值为(Mohr et al. ,2008)

$$G = 6.67428 \times 10^{-8}\mathrm{cm}^3 \cdot \mathrm{g}^{-1} \cdot \mathrm{s}^{-2} \tag{4.2.78}$$

有了万有引力常数,就可以测定地球的质量了。假定有一质量为 m 的球,悬挂在弹性系数为 k 的弹簧上,地球对 m 的吸引力为

$$F = \frac{GMm}{r^2} \tag{4.2.79}$$

其中 r 是地心至弹簧秤的距离。

由胡克定律,有

$$F = kx \tag{4.2.80}$$

其中 x 是弹簧悬挂了质体之后伸长的距离。

由方程(4.2.79)和方程(4.2.80)得

$$\frac{GMm}{r^2} = kx \tag{4.2.81}$$

故有

$$M = \frac{kxr^2}{mG} \tag{4.2.82}$$

由此可求出地球的质量 M。

实际上,由于地球并不是均质圆球,因此,按上述方式所求得的地球的质量是很不精确的。假设在地球的整个表面都按方程(4.2.82)求出了地球质量 $M(r,x)$,那么,可以对整个地球表面求平均,得到相对而言较为精确的地球质量值

$$M = \frac{1}{\partial\Omega}\int_{\partial\Omega} M(r,x)\,\mathrm{d}\sigma \tag{4.2.83}$$

其中,$\partial\Omega$ 是地球表面面积,$\mathrm{d}\sigma$ 是面积分的面积元,面积分在整个地球表面上进行。

不过,由于方程(4.2.82)本身并不严格成立,因此,由方程(4.

2.83）确定的平均值也是不精确的，不能代表地球的真实质量。要想精确地求出地球质量，比较有效的手段是采用大地测量方法，确切地说，采用直接重力测量方法，并应用 Stokes 原理解边值问题求解，或通过间接的卫星摄动测量方法，并利用最小二乘原理求解（这时确定的是组合量 GM，称为地心引力常数）。Stokes（1845）曾经证明，如果知道了地球表面的重力值（假定地球旋转角速度已知），并且知道了地球形状，则可唯一地确定地球的质量。为了证实这一点，我们首先利用高斯－奥斯特拉斯基本定理（参见菲赫金哥尔茨，1959）

$$\int_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}\Omega=\int_{\partial\Omega}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,\mathrm{d}\sigma \tag{4.2.84}$$

这个定理将体积分转化成了面积分，或者也可以反过来说，将面积分转化成了体积分，其中 $\mathrm{d}\Omega$ 是体积分的体积元，Ω 是地球所占据的空间区域，也表示地球体积，$\partial\Omega$ 是地球表面，P、Q、R 是 (x,y,z) 的连续函数，并且具有一阶连续偏导数，$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 是外法线方向余弦。令

$$P=\frac{\partial V}{\partial x}U,\quad Q=\frac{\partial V}{\partial y}U,\quad R=\frac{\partial V}{\partial z}U \tag{4.2.85}$$

其中 U 和 V 是分别具有一阶连续导数和二阶连续导数的任意函数，则方程（4.2.84）可改写成

$$\int_{\Omega}[(\Delta V)U+D(V,U)]\,\mathrm{d}\Omega=\int_{\partial\Omega}\frac{\partial V}{\partial n}U\,\mathrm{d}\sigma \tag{4.2.86}$$

其中

$$D(V,U)=\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial U}{\partial z} \tag{4.2.87}$$

表达式（4.2.86）称为第一 Green 公式，在该式中调换 U 和 V 的位置，则有

$$\int_{\Omega}[(\Delta U)V+D(U,V)]\,\mathrm{d}\Omega=\int_{\partial\Omega}\frac{\partial U}{\partial n}V\,\mathrm{d}\sigma \tag{4.2.88}$$

由于 $D(V,U)=D(U,V)$，因此，由方程（4.2.86）和（4.2.88）得

$$\int_{\Omega}[(\Delta V)U-(\Delta U)V]\,\mathrm{d}\Omega=\int_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial V}{\partial n}U-\frac{\partial U}{\partial n}V\right)\mathrm{d}\sigma \tag{4.2.89}$$

此即第二 Green 公式。取 $U = 1$, $V = W$(重力位),则方程(4.2.89)变为

$$\int_{\Omega} \Delta W \mathrm{d}\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial W}{\partial n} \mathrm{d}\sigma \equiv \int_{\partial\Omega} \frac{\partial W}{\partial n} \mathrm{d}\sigma \equiv \int_{\partial\Omega} g_n \mathrm{d}\sigma \qquad (4.2.90)$$

其中 $g_n \equiv \frac{\partial W}{\partial n}$ 是地球表面沿法线方向的重力。在地球内部,引力位 V 满足 Poisson 方程(在大地测量中 V 取正值)

$$\Delta V = -4\pi G\rho \qquad (4.2.91)$$

其中,Δ 是拉普拉斯(Laplace)算符,ρ 是(x,y,z)处的物质密度,而离心力位满足

$$\Delta Q = \Delta\left[\frac{1}{2}(x^2 + y^2)\omega^2\right] = 2\omega^2 \qquad (4.2.92)$$

因此,重力位满足

$$\Delta W = -4\pi G\rho + 2\omega^2 \qquad (4.2.93)$$

其中 ω 是地球自转角速度。将方程(4.2.93)代入方程(4.2.90),得

$$-4\pi G\int_{\Omega} \rho \mathrm{d}\Omega + 2\omega^2 \int_{\Omega} \mathrm{d}\Omega = \int_{\partial\Omega} g_n \mathrm{d}\sigma \qquad (4.2.94)$$

由此得到

$$M = -\frac{1}{4\pi G}\int_{\partial\Omega} g_n \mathrm{d}\sigma + \frac{\omega^2}{2\pi G}\Omega \qquad (4.2.95)$$

只要在整个地球表面精确地测定了重力法向分量 g_n,即可根据方程(4.2.95)精确求出地球质量 M。

实际上,我们可以采用如下简单的方法确定地球总质量。选取 Brillourin 球(即包含地球的最小的球,实际应用中可取半径为 6372 公里且球心与地心重合的球),其表面记为 ∂K。将球面格网化,利用重力场模型如 EGM96(Lemoine et al.,1998)或 EIGEN(Reigber et al.,2003)计算每个格网几何中心的法向重力分量。然后,基于方程(4.2.95),利用数值化方法(即将积分转化为求和),即可求得地球的总质量。另一方面,可采用时变重力场模型确定地球质量随时间的演化规律,因为地球的总质量很有可能在变化(饶扬玉,1994;申文斌等,2008b)。不过,采用卫星激光测距(SLR)技术应能得到更好的结果,因为无论是 EGM96 模型还是 EIGEN 模型,均采用了已知的地

心引力常数 GM，后者由 SLR 技术确定(Cheng and Tapley，2004)。

尽管采用上述重力测量方法测定地球的质量是精确的，但要实际实现比较困难，也只能采用近似方法，主要原因在于难以获得覆盖全球的重力资料。目前所确定的地球的质量约为 5.974×10^{27}g(苏宜，2002)，这是采用卡文迪西方法并联合卫星摄动法确定的，前者确定引力常数，后者确定地心引力常数 GM。目前确定引力常数的精度大约为 10^{-5}(苏宜，2002；Mohr et al.，2008)。

这里需要指出，无论采用卡文迪西方法还是重力测量方法，抑或卫星重力测量方法，测定的地球的质量都是相对地固质心参考系而言的质量。现在我们要问：在地心准惯性参考系中考察，地球的质量有多大？

按照牛顿理论，地球质量无论在哪个参考系中考察都是相同的。但按照广义相对论，地球质量的大小与在哪个参考系中考察有关。假定在地固质心参考系中测定的地球的质量为 M，那么，在地心准惯性系中考察，由于地球的自转运动，地球的质量将变大。为了估算这一增量，让我们考察一简单模型，即假定地球是半径为 R 的均质刚性圆球，以恒定的角速度绕地球自转轴旋转。地心距为 r、余纬为 θ 处的质量微元 $\mathrm{d}m$ 以速度 $(r\sin\theta)\omega$ 运动，如图4.2.4所示。因此，在地心准惯性系中考察，微元 $\mathrm{d}m$ 的质量为

$$\mathrm{d}m' = [1 - (r^2\sin^2\theta)\omega^2]^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}m = (1 - \omega^2 r^2 \sin^2\theta)^{-\frac{1}{2}}\rho\mathrm{d}\Omega \tag{4.2.96}$$

其中，ρ 是在地固质心参考系中的地球的密度，这里的 $\mathrm{d}\Omega$ 是体积微元。由方程(4.2.96)，在地心准惯性参考中考察，地球的质量为

$$M' = \int \mathrm{d}m' = \int_\Omega (1 - \omega^2 r^2 \sin^2\theta)^{-\frac{1}{2}}\rho\mathrm{d}\Omega \tag{4.2.97}$$

由于假定了 ρ 为常数(均质圆球)，因此，上式可写成

$$M' = \rho\int_\Omega (1 - \omega^2 r^2 \sin^2\theta)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}\Omega \tag{4.2.98}$$

准确到 $v^2(v = \omega r\sin\theta)$，上式可写成

$$M' = \rho\int_\Omega \left(1 + \frac{1}{2}\omega^2 r^2 \sin^2\theta\right)\mathrm{d}\Omega$$

$$= M + \frac{1}{2}\rho\,\omega^2\int_\Omega r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\Omega \tag{4.2.99}$$

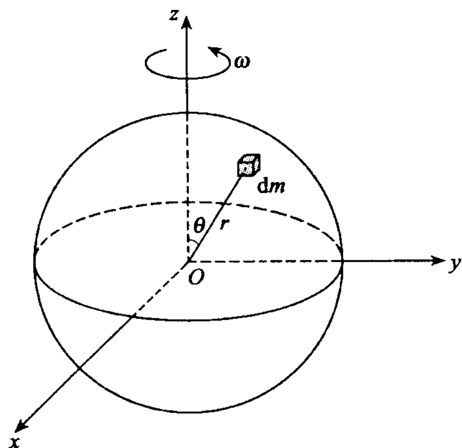


图 4.2.4　$O-xyz$ 是地心准惯性坐标系

在球面坐标系下，$\mathrm{d}\Omega$ 可写成

$$\mathrm{d}\Omega = \mathrm{d}r(r\mathrm{d}\theta)(r\sin\theta\mathrm{d}\lambda) = r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\lambda \tag{4.2.100}$$

故方程(4.2.99)可写成

$$\begin{aligned} M' &= M + \frac{1}{2}\rho\,\omega^2\int_\Omega r^2\sin^2\theta\cdot r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\lambda \\ &= M + \frac{1}{2}\rho\,\omega^2\int_\Omega r^4\sin^3\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\lambda \\ &= M + \frac{1}{2}\rho\,\omega^2\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{5}R^5\cdot 2\int_0^{\pi/2}\sin^3\theta\mathrm{d}\theta \end{aligned} \tag{4.2.101}$$

因

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2}\sin^3\theta\mathrm{d}\theta &= -\int_0^{\pi/2}(1-\cos^2\theta)\mathrm{d}\cos\theta \\ &= -\left[\cos\theta - \frac{1}{3}\cos^3\theta\right]_0^{\pi/2} = \frac{2}{3} \end{aligned} \tag{4.2.102}$$

故有

$$M' = M + \frac{1}{2}\rho\omega^2 \cdot \frac{4\pi}{5}R^5 \cdot \frac{2}{3}$$
$$= M + \frac{(\omega R)^2}{5}\left(\frac{4\pi}{3}R^3\right)\rho = M + \frac{(\omega R)^2}{5}M \qquad (4.2.103)$$

我们采用了光速单位制，因此 ωR 是小量。取地球自转角速率 $\omega = 7.292115 \times 10^{-5}\mathrm{s}^{-1}$，则

$$\omega R \approx \frac{4.6 \times 10^4}{3 \times 10^{10}} \approx 1.5 \times 10^{-6} \qquad (4.2.104)$$

由方程(4.2.103)得

$$M' = M + \frac{2.25}{5} \times 10^{-12}M \qquad (4.2.105)$$

取地球质量 $M = 5.974 \times 10^{27}\mathrm{g}$(苏宜，2002)，得

$$M' = 5.976 \times 10^{27}\mathrm{g} + 2.7 \times 10^{15}\mathrm{g} \qquad (4.2.106)$$

方程(4.2.103)或方程(4.2.106)给出了在地心准惯性系中考察的地球的质量，$(M' - M)/M$ 的量级是 10^{-12}。由于目前确定地球的质量的精度只能达到 $10^{-4} \sim 10^{-6}$(陈国新主编，1984；苏宜，2002；Stöcker，2004)，因此，方程(4.2.103)在实际应用中是没有意义的。也就是说，考虑到目前确定地球质量的精度水平，可以认为，无论在地固质心参考系中考察，还是在地心准惯性系中考察，地球的质量是相同的。

现在我们在太阳质心准惯性系中考察地球的质量有多大。根据前面的讨论，由地球自转而引起的地球质量的变化完全可以忽略不计(因为目前测定地球质量的精度远远达不到能察觉到这种变化的程度)。为此，我们只需要讨论由于地球的公转运动而引起的地球质量的变化(在太阳质心准惯性系中考察)。地球的公转速度为 $v = 10^{-4}$，因此，在太阳质心准惯性系中考察，地球的质量为

$$M' = (1 - v^2)^{-\frac{1}{2}}M \approx \left(1 + \frac{1}{2}v^2\right)M = \left(1 + \frac{1}{2} \times 10^{-8}\right)M \qquad (4.2.107)$$

由于地球质量很大，$0.5 \times 10^{-8}M$ 也是一个很大的量，约为 $3 \times 10^{19}\mathrm{g}(= 3 \times 10^{13}$ 吨)。但正如前面所指出的，目前能够测定的地球

质量的精度只有 $10^{-4} \sim 10^{-6}$，因此，方程(4.2.107)实际上也没有什么意义，换言之，即使在太阳质心准惯性系中考察，仍然可以认为地球的质量为 M，无须修正。

概括起来说，由于受目前测定地球质量本身的精度所限，我们没有必要区分不同参考系中的地球的质量。进一步推想，由于太阳系中其他天体的质量是根据地球的质量推算出来的，因此，所确定的其他天体的质量的精度不可能比目前确定的地球质量的精度高。这就意味着，就目前的精度水平而言，太阳系中其他天体的质量可以认为与参考系无关。但必须强调，这并非意味着在任何情况下我们都可将天体的质量视为常数。在考虑某些高速运动的天体时，必须考虑质量与参考系的相关性。另外，为了考察某种特殊的效应，也必须考察质量与参考系的相关性。不过，有种种迹象表明，引力质量与参考系的选取无关，只有惯性质量与参考系的选取有关(申文斌，1994)。

4.3　重力位与相对论大地水准面

4.3.1　重力位

在 4.2.1 节已经指出，重力与引力没有本质的区别，它们之间的差异仅仅是由于参考系的选取不同所致。同理，重力位与引力位也具有相同的类比。我们已经知道，度规张量 $g_{\mu\nu}$ 具有引力位特性。参考系变换之后，$g_{\mu\nu}$ 作相应的变换，变换后的新的度规张量与原来的度规张量没有本质区别，只是函数表达式以及变量不同而已。因此，度规张量也可以认为具有重力位特性。引力位是重力位的特例，当在准惯性系中讨论问题时，重力位就转化成了引力位。按照物理学的观点，重力位的变化表示能量的改变。一个粒子从高位下落到低位它获得能量(其确切含义是降低位能、增加动能)，反之，从低位运动到高位，则损失能量(其确切含义是提高位能、减少动能)。

重力位特别是后面要引进的重力位等位面(通常也简称重力等位面)在大地测量中具有重要应用。为了从重力位引进重力位等位面的概念，我们考察原时间隔

$$d\tau^2 = -g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -g_{00}dt^2 - 2g_{0i}dtdx^i - g_{ij}dx^i dx^j \tag{4.3.1}$$

以前曾经指出，度规 $g_{\mu\nu}$ 具有引力位特征；又因 $g_{\mu\nu}$ 与坐标变换有关，因此，也可以认为度规 $g_{\mu\nu}$ 具有重力位特征。根据方程(4.3.1)可以写出

$$\frac{d\tau^2}{dt^2} = -g_{00} - g_{0i}\frac{dx^i}{dt} - g_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt} \equiv -g_{00} - 2g_{0i}v^i - g_{ij}v^i v^j \tag{4.3.2}$$

v^i 表示质点的运动速度。把上述方程应用于重力位，由于重力位表示一种静态过程，$v^i = 0$，因此有

$$\frac{d\tau^2}{dt^2} = -g_{00} \tag{4.3.3}$$

方程(4.3.3)表明，就静态重力位而言，可用 $-g_{00}$ 表示。所有使得 $-g_{00}$ 相同的空间点的集合就构成了一个等位面，称为重力位等位面。也就是说，重力位等位面可表示成

$$-g_{00} = C \tag{4.3.4}$$

其中 C 是常数。

再根据方程(4.3.3)和(4.3.4)，得

$$dt^2 = \frac{1}{C}d\tau^2 \tag{4.3.5}$$

由于原时 $d\tau$ 总是保持不变，方程(4.3.5)表明，在重力位等位面上，时钟的运行速率相同。基于这一方程，我们可以这样定义重力位等位面：

重力位等位面是这样一个封闭曲面，在这个曲面上的所有精密时钟的运行速率相同。

按上述方式定义的重力位等位面可称为等时率面，最先由 Bjerhammar(1985,1986)提出。

在重力位等位面上，时钟的运行速率相同，因而时钟(包括原子钟)的振动频率也必定相同。这就是说，如果有两个点 A 和 B 位于重力位等位面上，那么，这两点之间不存在重力频移。实际上，光信号沿等位面传播时没有能量得失。基于这一观点，我们又可以将重力

位等位面定义为：

重力位等位面是这样一个封闭曲面，其上不存在重力频移。

按上述方式定义的重力位等位面称为等频面，最先由申文斌等提出(Shen et al.,1993a;金标仁，申文斌，1994;申文斌等，1994)。

4.3.2　相对论大地水准面的定义及注释

相对论大地水准面的概念由 Bjerhammar(1985,1986) 提出。他是按如下方式定义相对论大地水准面的：

相对论大地水准面是一个最接近于平均海水面的封闭曲面，在这个曲面上所有精密时钟的运行速率都相同。

显然，上述定义的基础是等时率面的定义(参见 4.3.1 节)，因而也可称之为等时率大地水准面。实际上，按等时率面的概念，又可将相对论大地水准面表述为最接近于平均海水面的等时率面。从理论上来说，根据上述定义，可以利用精密时钟确定相对论大地水准面。根据方程(4.3.4) 和方程(4.3.5)，我们可以写出

$$dt = \sqrt{\frac{1}{C}}d\tau = \frac{1}{\sqrt{-g_{00}}}d\tau \tag{4.3.6}$$

方程(4.3.6) 给出了时钟在任意一个等时率面(即重力位等位面)上的时钟的运行速率。假定相对论大地水准面 ∂S_0 由方程

$$g_{00} = -C_0 \tag{4.3.7}$$

给出，而任意一个等时率面 ∂S_h 由方程

$$g_{00} = -C_h \tag{4.3.8}$$

给出，则有

$$dt_0 = \sqrt{\frac{1}{C_0}}\,d\tau \tag{4.3.9}$$

$$dt_h = \sqrt{\frac{1}{C_h}}\,d\tau \tag{4.3.10}$$

由方程(4.3.9) ~ (4.3.10) 得

$$dt_h = \sqrt{\frac{C_0}{C_h}}\,dt_0 \tag{4.3.11}$$

其中 dt_0 和 dt_h 分别是精密时钟在 ∂S_0 面和 ∂S_h 面上的守时速率(单

位秒)。

从原理上来说,根据方程(4.3.11)可以利用精密时钟测定出地球表面上任意一点相对一已知重力位常数的重力位。有了地球表面的重力位,就可以通过解边值问题确定整个地球外部的重力位及重力场(详见4.4.4节),这是优于经典方法的地方。按经典大地测量,无法直接测定地面点的重力位(或引力位),只能通过间接方法推求。不过,采用精密时钟(原子钟)确定重力位的精度取决于时钟的精度。由于目前已实现的原子钟的精度水平在 10^{-16} 左右(Stein, 1975;Dick and Strayer,1984;Bjerhammar,1986;Lämmerzahl et al., 2004;李天初等,2004a,b;王正明,2004;Heavner et al.,2005a,b; Sullivan et al.,2005),因此,由此确定的重力位差的精度相当于约1米的高程差(Bjerhammar,1985;Shen et al.,1993a;金标仁,申文斌,1994;Brumberg and Groten,2002)。为了证实这一点,考虑后牛顿近似场,只要将 g_{00} 的具体表达式写出,并采用球近似处理即可。详细讨论将在4.4.3节完成。不过,最近出现了"光钟"概念,其守时精度(稳定度)比目前最精密的时钟的守时精度还要高出2到3个数量级(Schwob et al.,1999;Ye et al.,2000;Udem et al.,1997),可达到 10^{-18} 到 10^{-19}(Ma et al.,2004)。这种"光钟"可望在不远的将来实现。

以等频面为基础,我们又可按如下方式定义相对论大地水准面:

相对论大地水准面是最接近于平均海水面的封闭曲面,在这个曲面上不存在重力频移。

或者,将相对论大地水准面简单地表述为最接近于平均海水面的等频面。按上述方式定义的相对论大地水准面,称之为等频大地水准面。按照等频大地水准面的概念,我们可以通过频移观测确定相对论大地水准面。同样,根据频移观测,可以确定整个地球表面的重力位,从而通过解边值问题求出地球外部重力场(详见4.4.4节)。由于频率与周期互为倒易关系,而单位秒长可根据周期来定义的,因此,根据方程(4.3.11),我们可以写出

$$f_h = \sqrt{\frac{C_h}{C_0}} f_0 \qquad (4.3.12)$$

其中,f_0 是时钟在等频大地水准面 ∂S_0 上的振动频率,而 f_h 是时钟在

由方程(4.3.8)决定的等频面 ∂S_h 上的振动频率。根据频移观测,可以确定 $(f_h - f_0)/f_0$。因此,由方程(4.3.12),只要事先选定或确定了大地水准面常数 C_0(确定 C_0 的方法见 4.4.2 节),则可求出 C_h。

等频大地水准面具有比等时率大地水准面更为牢靠的基础。即使广义相对论不正确,等频大地水准面的概念仍然是有效的,因为这一定义的基础是频移方程,而这一方程可以采用量子力学观点并结合能量守恒原理推论出来(参见 3.1.5 节;Shen et al.,1993a)。不过,假如广义相对论正确,那么,无论采用哪种定义都是相同的。但为了后面的应用方便起见,也基于上述考虑,我们今后选用等频面以及等频大地水准面的定义。

4.3.3 相对论大地水准面与经典大地水准面的差异

为了探讨相对论大地水准面与经典大地水准面的差异,需要写出两种水准面的具体方程形式。我们知道,经典(无潮)大地水准面是按如下方式定义的

$$W(x,y,z) = C_{cl} \tag{4.3.13}$$

其中

$$W(x,y,z) = V(x,y,z) + Q(x,y,z) \tag{4.3.14}$$

是牛顿重力位,C_{cl} 是位常数,V 是牛顿引力位,可表示成

$$V(x,y,z) = \int_\Omega \frac{G\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}|}\mathrm{d}\Omega \tag{4.3.15}$$

上述积分对整个地球域 Ω 进行,Q 是离心力位,可表示成

$$Q(x,y,z) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)\omega^2 \tag{4.3.16}$$

ω 是地球自转角速度。根据方程(4.3.13)—(4.3.16),经典大地水准面可表示成

$$\int_\Omega \frac{G\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}|}\mathrm{d}\Omega + \frac{1}{2}(x^2 + y^2)\omega^2 = C_{cl} \tag{4.3.17}$$

其中,经典大地水准面位常数 C_{cl} 的取值,应使得由方程(4.3.17)决定的封闭曲面最接近于平均海水面。

相对论大地水准面由方程(4.3.7)决定。按后牛顿近似,在地

心准惯性系中，g_{00} 可写成(见 3.6.1 节)

$$g_{00} = -1 + \overset{2}{g}_{00} + \overset{4}{g}_{00} + \cdots$$
$$= -1 - 2\varphi - 2\varphi^2 - 2\psi - o(\varphi^2) \qquad (4.3.18)$$

其中，$o(\varphi^2)$ 表示比 φ^2 更高阶的小量，可忽略；φ 是第一牛顿引力位，取负值，即有

$$\varphi = -V = -\int_\Omega \frac{G\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}|} \mathrm{d}\Omega \qquad (4.3.19)$$

ψ 是第二引力位，可表示成(参见方程(3.6.67))

$$\psi = -\int_\Omega \frac{1}{|\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}|}\left[\frac{1}{4\pi}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + G\overset{2}{T}_{00}(t,\boldsymbol{r}) + G\delta_{ij}\overset{2}{T}^{ij}(t,\boldsymbol{r}')\right]\mathrm{d}\Omega \qquad (4.3.20)$$

在地固质心参考系中考察，g_{00} 可表示成(参见 4.2.1 节的方程(4.2.36))

$$g_{00} = -1 - 2\varphi + \omega^2(x^2 + y^2) - 2\varphi^2 - 2\psi$$
$$- 2\omega^2(x^2 + y^2)\varphi - \frac{4G}{r^3}J\omega(x^2 + y^2) \qquad (4.3.21)$$

由方程(4.3.7) 和(4.3.21)，相对论大地水准面可表示成

$$-\varphi + \frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2) - \varphi^2 - \psi - \omega^2(x^2 + y^2)\varphi$$
$$- \frac{2G}{r^3}J\omega(x^2 + y^2) = C_r \qquad (4.3.22)$$

其中，$C_r \equiv C_0 + 1/2$，φ 和 ψ 分别由方程(4.3.19) 和(4.3.21) 给出，J 由方程(4.2.31) 给出。

比较相对论大地水准面(4.3.22) 与经典大地水准面(4.3.17) 可以看出，如果规定 $C_r = C_{cl}$，则二者相差的量为

$$\Delta = -\varphi^2 - \psi - \omega^2(x^2 + y^2)\varphi - \frac{2G}{r^3}J\omega(x^2 + y^2) \qquad (4.3.23)$$

上式等号右边的每一项都是 v^4 量级，因此 Δ 与 φ^2 同数量级。就误差估计而言，φ 可以用正常引力位 GM/r 来代替。因此，Δ 与 $(GM/r)^2$ 同数量级。与 Δ 对应的高差有多大呢?为了作出估算，将 Δ 写成

$$|\Delta| \approx \varphi^2 \approx \frac{GM}{r}\varphi = \frac{2}{3} \times 10^{-9}\varphi \quad (r \approx R) \qquad (4.3.24)$$

由于对应于 φ 的高度为 r,因此,对应于 Δ 的距离为

$$\frac{2}{3}\times 10^{-9}r \tag{4.3.25}$$

在大地水准面附近,r 取 $R = 6.4 \times 10^8\text{cm}$,则

$$|\Delta| \approx \frac{2}{3}\times 10^{-9}\times 6.4\times 10^8\text{cm} = 0.4\text{cm} \tag{4.3.26}$$

由此可见,相对论大地水准面与经典大地水准面的差异大约 0.5 厘米。目前所能确定的全球大地水准面的精度水平大约几十厘米(Rapp,1992;Lemoine et al.,1997,1998)。因此,上述差异完全可以忽略。也就是说,现有的用经典测量方法确定的大地水准面可以认为是与相对论大地水准面重合的。但必须强调,这里所说的重合是忽略其间微小差异意义上的重合,并不是说相对论大地水准面的概念可以用经典大地水准面的概念来代替。实际上,引进相对论大地水准面的概念之后,我们有可能用全新的方法来确定它。另一方面,我们可以用相对论方法直接测定地球表面的重力位(详见 4.4.1 节),直接确定任意两点之间的高程差(等于重力位差除以重力值),而无须经典水准测量(详见 4.4.3 节)。有了地球表面的重力位,就可以求解地球外部的重力场。这些都是优于经典测量方法的地方。另外,如果对测定大地水准面的精度要求提高,例如高于 1 厘米,则需考虑相对论大地水准面与经典大地水准面之间的差异。

我们再来研究一下相对论大地水准面(即等频大地水准面(4.3.22))。按惯用的引力位表示法,φ 用 $-V$ 代替,并用 Q 表示离心力位 $\frac{1}{2}\omega^2(x^2+y^2)$,则方程(4.3.22)可表示成

$$V + Q - V^2 - \psi + 2QV - \frac{2G}{r^3}\frac{J}{\omega}Q = C_r \tag{4.3.27}$$

在地固质心参考系中,V(即 $-\varphi$)认为与时间无关,由方程(4.3.20)得

$$\psi = -\int_\Omega \frac{1}{|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}|}\left[G\overset{2}{T}{}^{00}(t,\boldsymbol{r}') + G\delta_{ij}\overset{2}{T}_{ij}(t,\boldsymbol{r}')\right]\mathrm{d}\Omega \tag{4.3.28}$$

T^{ij} 表示动量流密度。在地固质心系中,$T^{ij}=0$。又

$$T^{00} = \overset{0}{T}{}^{00} + \overset{2}{T}{}^{00} + \cdots \tag{4.3.29}$$

T^{00} 表示物质的密度。当取定 $\overset{0}{T}{}^{00} = T^{00}$ 时，$\overset{2}{T}{}^{00} = 0$。但一般情况下我们不知道密度分布，在计算 φ 时只能取近似的密度 $\overset{0}{T}{}^{00}$ 作为一级近似。于是 $\overset{2}{T}{}^{00} = T^{00} - \overset{0}{T}{}^{00}$ 表示剩余密度值，记为 $\delta\rho$，则方程(4.3.28)可表示成

$$\psi = -G\int_{\Omega} \frac{1}{|\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}|}\delta\rho \mathrm{d}\Omega \tag{4.3.30}$$

注意到

$$V = G\int_{\Omega} \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}|}\mathrm{d}\Omega \tag{4.3.31}$$

显然，ψ 比 V 小得多。我们假定 V 尽可能精确，则 ψ 完全可以略去（当 V 趋于真值时，$\psi \to 0$，这是当 $T^{ij} = 0$ 时的结果）。

就大地水准面而言，Q 比 V 小得多，因此，相比之下，QV 比 V^2 小得多。又因

$$J = \frac{2R^2\omega M}{5}$$

$$\frac{4G}{r^3}\frac{J}{\omega}Q = \frac{4G}{r^3}\frac{2R^2M}{5}Q \sim \frac{8R^2}{5r^2}VQ \sim \frac{8}{5}VQ << V^2 \tag{4.3.32}$$

因此，等频大地水准面(4.3.27)可以写成

$$V + Q - V^2 = C \tag{4.3.33}$$

这里，略去了比 V^2 更高阶的量。

4.4 高程差以及地球外部重力场的确定

4.4.1 测定重力位差的重力频移法

假定在地面 P 点发射频率为 f 的电磁波信号，在地面 Q 点接收这一电磁波信号，则由于 P 与 Q 之间存在重力位差，接收到的电磁波信号频率不再是 f，而是 f'。P 和 Q 点的时钟的运行速率分别由下述方程给出

$$dt_P = \frac{1}{\sqrt{-(g_{00})_P}}d\tau \tag{4.4.1}$$

$$dt_Q = \frac{1}{\sqrt{-(g_{00})_Q}}d\tau \tag{4.4.2}$$

其中下标 P 和 Q 表示相应于 P 和 Q 处的量。由上边两式推出

$$\frac{dt_Q}{dt_P} = \sqrt{\frac{(g_{00})_P}{(g_{00})_Q}} \tag{4.4.3}$$

根据方程(4.4.3)并仿效3.1.5节关于引力频移的推导过程，可以推出如下频移方程

$$\frac{f_Q - f_P}{f_P} = \frac{f_Q}{f_P} - 1 = \sqrt{\frac{(g_{00})_P}{(g_{00})_Q}} - 1 \tag{4.4.4}$$

即

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{f' - f}{f} = \sqrt{\frac{(g_{00})_P}{(g_{00})_Q}} - 1 \tag{4.4.5}$$

其中 g_{00} 由方程(4.3.21)给出。

我们改写一下方程(4.3.21)，并保留到 V^2 量级，则有

$$g_{00} = -1 + 2V - 2V^2 + 2Q = -1 + 2W - 2V^2 \tag{4.4.6}$$

其中 W 是经典牛顿重力位。于是，我们可以写出

$$(g_{00})_P = -1 + 2W_P - 2V_P^2 \tag{4.4.7}$$

$$(g_{00})_Q = -1 + 2W_Q - 2V_Q^2 \tag{4.4.8}$$

由上边两式，$(g_{00})_Q$ 可写成

$$\begin{aligned}(g_{00})_Q &= -1 + 2W_P - 2V_P^2 + 2(W_Q - W_P) - 2(V_Q^2 - V_P^2) \\ &= (g_{00})_P + 2\Delta W_{PQ} - 2(V_P + V_Q)\Delta V_{PQ} \\ &= (g_{00})_P + 2\Delta W_{PQ} - 4V_P\Delta V_{PQ}\end{aligned} \tag{4.4.9}$$

这里的 Δ 表示增量符号。在光速单位制下，引力位本身是小量，而在一般情况下，P 与 Q 之间的重力位差(或引力位差)远小于 P 或 Q 点的重力位(或引力位)本身。因此，从目前的大地测量精度以及通常的实际应用来看，可将方程(4.4.9)第三个等式右边的最后一项略去，即有

$$(g_{00})_Q = (g_{00})_P + 2\Delta W_{PQ}$$

$$\left[\frac{(g_{00})_Q}{(g_{00})_P}\right]^{\frac{1}{2}} = \left[1 + \frac{2\Delta W_{PQ}}{(g_{00})_P}\right]^{\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{\Delta W_{PQ}}{(g_{00})_P} \quad (4.4.10)$$

将方程(4.4.7)代入上式,准确到 ΔW,得

$$\left[\frac{(g_{00})_Q}{(g_{00})_P}\right]^{\frac{1}{2}} = 1 - \Delta W_{PQ} \quad (4.4.11)$$

将方程(4.4.11)代入方程(4.4.5),得

$$\Delta f \equiv f' - f = -f\Delta W_{PQ} \equiv -f(W_Q - W_P) \quad (4.4.12)$$

这就给出了 P 与 Q 之间的重力频移方程。Katila and Riski(1983)曾经以 10^{-2} 的精度证实了方程(4.4.12),Vessot et al.(1980)则以 10^{-4} 的精度证实了方程(4.4.12)的正确性。

假定知道了 P 点的重力位,则可通过观测 P 与 Q 之间的重力频移 Δf(参见图4.4.1;Shen 2005c),再由方程(4.4.12)确定 Q 点的重力位

$$W_Q = W_P - \frac{\Delta f}{f} \quad (4.4.13)$$

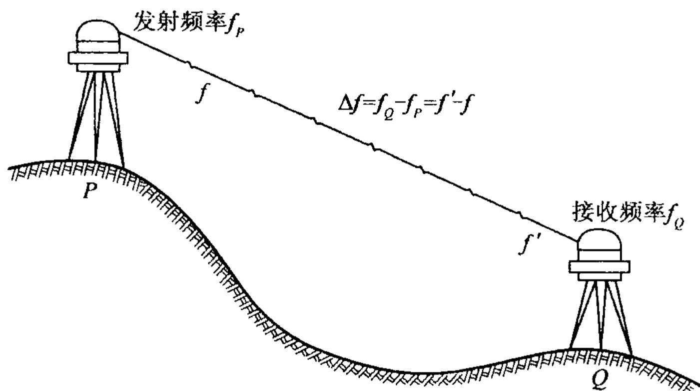


图 4.4.1 地面 $\partial\Omega$ 上选取两点 P 和 Q,由 P 向 Q 发射电磁波信号,发射频率为 f,Q 处接收到的频率为 f'

若将 P 点选在大地水准面上(经典大地水准面与相对论大地水准面相差甚微,以致可以不加区分),则有

$$W_Q = C_0 - \frac{\Delta f}{f} \tag{4.4.14}$$

其中，C_0 是大地水准面位常数，可通过后面（见 4.4.2 节）要介绍的方法确定。

由方程（4.4.14），一旦确定了常数 C_0，则可通过频移观测法确定出地球表面上任意一点 Q 处的重力位了。测定频移的基本原理如下：

在 P 点放置一个发射装置，以频率 f 发出电磁波信号，在 Q 点接收来自 P 处的信号，并与自身的标准频率 f 比对，则可确定频移量 Δf，从而根据方程（4.4.13）求出 P 与 Q 点之间的重力位差 ΔW_{PQ}。应用同样的原理，可求出大地水准面上 Q 点与过 P 点的等频面之间的重力位差 ΔW_{QP}。当 C_0 已知时，即可求出 W_P。

以上测定位差的原理可以应用于发射源是卫星的情形（Shen et al.,1993a），由此可解决洲际之间的位差测定问题，对最终实现全球高程基准统一具有重要意义。以卫星作为电磁波信号发射源，利用重力频移方程（4.4.12）或方程（4.4.13）确定任意两点 P 和 Q 之间重力位差的基本原理可通过图 4.4.2 显示出来（Shen,2005c），这里不再详细阐述。

4.4.2　大地水准面位常数的确定

根据 4.3.3 节的研究，相对论大地水准面与经典大地水准面的差异只有 0.5 厘米左右，因此，在实际应用时，我们可以将二者等同起来。假定大地水准面由方程

$$W = W_0 \tag{4.4.15}$$

给出，其中 W_0 是常数，那么，当 W_0 取不同正值时，由方程（4.4.15）决定的封闭曲面具有不同的形状（主要是收缩或扩张）。如何才能选取这样一个常数 W_0，使得由方程（4.4.15）决定的曲面与平均海水面最为接近呢？

Heiskanen and Moritz（1967）曾经指出了一种用弧线测量法确定大地水准面漂移 N_0，进而可确定 W_0 的方案。下面我们采用不同的两种方案，分别基于（Shen et al.,1993b）和（申文斌等，2006a）。

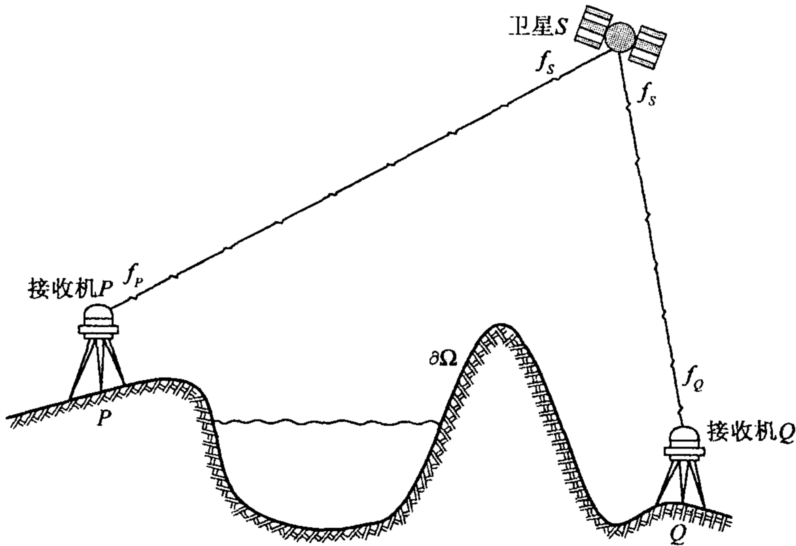


图 4.4.2　卫星 S 发射频率为 f_S 的电磁波信号，地面 $\partial\Omega$ 上位于两点 P 和 Q 处的接收机（也用 P 和 Q 表示）同时接收卫星信号，接收到的频率分别为 f_P 和 f_Q。于是，基于重力频移方程(4.4.12) 即可确定相应的重力位差：$\Delta W_{PQ} = \Delta W_{PS} - \Delta W_{QS} = -(\Delta f_{PS} - \Delta f_{QS})/f_S$

4.4.2.1　方案一

取一个平均椭球体或称正常椭球，它所包含的质量与地球的质量相同，具有与地球相同的自转角速度，椭球体表面的正常重力位（即根据平均椭球体计算出的重力位）用 U_0 表示。今假定已知一平均海面数值模型及相应的重力异常 Δg（重力异常 Δg 是大地水准面上的重力与相应平均椭球面上的正常重力之差，在海域可由卫星测高数据获得），利用 Stokes 公式（Heiskanen and Moritz,1967；方俊，1975；管泽霖，宁津生，1981），则可确定与全球平均海面格网点相应的大地水准面上的扰动位 T_S（重力位 W 与正常重力位 U 之差，即 $T_S = W - U$）

$$T_S = \frac{R}{4\pi}\int_\sigma S(\psi)\Delta g \mathrm{d}\sigma \qquad (4.4.16)$$

以及大地水准面高

$$N_S = \frac{T_S}{\gamma} \tag{4.4.17}$$

其中，R 是地球半径，σ 是单位球面，γ 是平均椭球面上的正常重力，$S(\psi)$ 是 Stokes 函数，参见 1.1.2 节，可表示成（伊捷尔松，1963；Heiskanen and Moritz，1967）如下形式

$$\begin{aligned} S(\psi) &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos\psi) \\ &= \frac{1}{\sin\frac{\psi}{2}} - 6\sin\frac{\psi}{2} + 1 - 5\cos\psi \\ &\quad - 3\cos\psi \ln\left(\sin\frac{\psi}{2} + \sin^2\frac{\psi}{2}\right) \end{aligned} \tag{4.4.18}$$

其中，$P_n(\cos\psi)$ 是 Legendre 缔合函数 $P_{nm}(\cos\psi)$ 在 $m = 0$ 时的特例（参见 4.4.4 节），又称 Legendre 多项式；积分域 ∂K 取半径为 R 的圆球球面（球近似）；下标“S”表示采用 Stokes 方法计算。

由此，可计算大地水准面上所有格网点的重力位 W'_0

$$W'_0 = U + T_S \tag{4.4.19}$$

其中 U 为相应点上的正常重力位，可由已知的正常重力位公式计算。理论上应有 $W'_0 = U_0$，其中 U_0 是平均椭球面上的正常重力位，但实际上，由于按式(4.4.16)和(4.4.17)确定的大地水准面是一初始位置，不一定达到与平均海面的最佳接近，平均椭球面与大地水准面也不一定是最佳接近，加之各种误差影响，因此不但 W'_0 可能不等于 U_0，而且也不一定是常数。但由此可计算各格网点上的海面地形 ζ（平均海面相对大地水准面的起伏，注意，希腊字母 ζ 在 3.6 节表示矢量位）

$$\zeta = h_{MSS} - N_S \tag{4.4.20}$$

并计算平均海面所有格网点上 ζ 的均值 $\bar{\zeta}$，其中 h_{MSS} 是平均海面相对于平均椭球面的高（大地高）。进一步可由大地水准面上一点的重力位 W'_0 计算平均海面对应点的重力位 W_{MSS}

$$W_{MSS} = W'_0 - \gamma_m \zeta \tag{4.4.21}$$

其中，γ_m 是大地水准面与平均海面之间的平均正常重力值，用全球

表面正常重力平均值 γ_0 代替 γ_m 已足够精确。进而计算全球平均海面 W_{MSS} 的均值 $\overline{W}_{MSS}$，并令大地水准面的位常数

$$W_0 = \overline{W}_{MSS} \tag{4.4.22}$$

于是，与全球平均海面最接近的大地水准面可由下列两式之一确定

$$N = h_{MSS} - (W_{MSS} - W_0)/\gamma_0 \tag{4.4.23}$$

或

$$N = h_{MSS} - [(W'_0 - \overline{W'_0})/\gamma_0 - (\zeta - \bar{\zeta})] \tag{4.4.24}$$

其中 $\overline{W'}_0$ 是所有大地水准面格网点上 W'_0 的均值。这里，W_0 是由全球海面重力数据确定的，与 U_0 可能存在差别

$$\delta W = W_0 - U_0 \tag{4.4.25}$$

U_0 是由决定平均椭球的四个基本参数 a, J_2, GM 和 ω 确定的位常数(Moritz,2000)，其中 a 是椭球长半径，J_2 是动力学形状因子(参见1.1.2节)，ω 是地球自转角速率。这里特别指出，四个基本参数表征地球基本几何和物理特性，可由地面大地测量、空间大地测量(特别是卫星重力测量)、深空探测器等现代大地测量技术测定。

当式(4.4.25)中的 δW 存在时，为满足 $\delta W = 0$ 的理论要求，未来可利用更精确的 U_0 值，对上述确定的大地水准面进行调整(缩放)，并进一步定义一个与全球大地水准面最佳拟合的平均椭球，使 $W_0 = U_0$。相关的有待研究的问题在此不作进一步讨论。

4.4.2.2 方案二

基本思想是利用带有位漂移 δW 的边值基于虚拟压缩恢复法(申文斌,2004)求解地球外部重力场，其中自然导出了 δW 与(地面)重力之间的漂移方程(见后)，然后再利用高精度的绝对重力测量确定位漂移 δW(申文斌等,2006a)。

若给定地球表面的重力位观测值，则地球表面 $\partial\Omega$ 的引力位 $V_{obs}|_{\partial\Omega}$ 可由

$$V_{obs}(P)|_{\partial\Omega} = W_{obs}(P)|_{\partial\Omega} - Q(P)|_{\partial\Omega} \tag{4.4.26}$$

求得，其中 $W_{obs}(P)|_{\partial\Omega}$ 和 $Q(P)|_{\partial\Omega}$ 分别是边界面 $\partial\Omega$ 上的重力位观测值和离心力位。通常难以测定重力位，但利用水准测量联合重力测量，或利用将来有可能实现的重力位频移法，可测定相对重力位(即任意两点之间的重力位差)，于是可确定相应的引力位差 ΔV_{obs}。

若已知位于大地水准面上的某个基点的引力位的初值为 V_0，则 $V_{obs}|_{\partial\Omega} = V_0 + \Delta V_{obs}$，假定 V_{obs} 中存在漂移量 $\delta V_{\partial\Omega}$，则有

$$V_{obs}|_{\partial\Omega} = V_{\partial\Omega} + \delta V_{\partial\Omega} \tag{4.4.27}$$

其中，$V_{\partial\Omega}$ 是真值，$V_{obs}|_{\partial\Omega}$ 是含有重力位漂移 δV 的地球表面 $\partial\Omega$ 上的观测值。$V_{\partial\Omega}$ 和 δV 都是待求未知量，只要解出其中一个量，可由方程(4.4.27)确定另一个量。为导出利用绝对重力测量确定漂移 δV 的实用关系式，以下先假定 $V_{\partial\Omega}$ 和 δV 已知，再应用虚拟压缩恢复法导出所需理论关系式。

对方程(4.4.27)两边进行虚拟压缩恢复(虚拟压缩恢复法的理论和数学模型详见文献：申文斌，2004；申文斌等，2006b，2006c)，得到一致收敛的级数解

$$V^*_{obs}(P) = V^*(P) + \delta V^*(P),\ P \in \overline{K} \tag{4.4.28}$$

$$\delta V^*(P) = V^*_{obs}(P) - V^*(P),\ P \in \overline{K} \tag{4.4.29}$$

其中，$\overline{K}$ 是地球内部 Bjerhammar 虚拟球 K 的外部空间，V^*_{obs}、V^*、δV^* 分别对应于虚拟观测场、虚拟场以及虚拟漂移场，它们分别是以 $V_{obs}|_{\partial\Omega}$、$V_{\partial\Omega}$、$\delta V_{\partial\Omega}$ 为边界值按虚拟压缩恢复法求出的，当把它们限定在地球外部空间时，分别对应于观测场、真实场以及漂移场。比如，如果在边界 $\partial\Omega$ 上给定真值(或观测值或漂移值)，那么，求出的外部场就是真实场(或观测场或漂移场)。对方程(4.4.29)两边沿径向求导，得

$$\frac{\partial}{\partial r}(\delta V^*) = \frac{\partial}{\partial r}(V^*_{obs} - V^*) \tag{4.4.30}$$

或写成

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r}(\delta V^*) &= \frac{\partial}{\partial r}[(V^*_{obs} + Q) - (V^* + Q)] \\ &= \frac{\partial}{\partial r}[W^*_{obs}(P) - W^*(P)] \\ &= g^{*r}_{obs}(P) - g^{*r}(P),\ P \in \overline{\Omega}\end{aligned} \tag{4.4.31}$$

其中，$g^{*r}_{obs}(P)$ 是由含重力位漂移 δW 的边界上的重力位确定的观测重力场的径向分量，定义在地球表面及其外部，在实际计算中采用差分方法求出(因为基于边界上的重力位，虚拟压缩恢复法直接给出

的是重力位场)；$g^{*r}(P)$ 是真实重力场的径向分量(同样定义在地球表面及其外部)，可由高精度的绝对重力测量获得。

在大地水准面上，漂移量 $\delta V(P)$ 属于系统误差，通常可视为常数 δV。因此，方程(4.4.29) 中的 δV^* 可用 $R\delta V/r$ 代替(申文斌等，2006a)；于是，方程(4.4.29) 可写成

$$\frac{R\delta V}{r} = V^*_{obs} - V^* = W^*_{obs}(P) - W^*(P) \qquad (4.4.32)$$

对上式两边沿径向求导，得

$$-\frac{R\delta V}{r^2} = \frac{\partial W^*_{obs}}{\partial r} - \frac{\partial W^*}{\partial r} = g^{*r}_{obs}(P) - g^{*r}(P),\ P \in \overline{\Omega} \qquad (4.4.33)$$

在大地水准面或地球表面 $\partial\Omega$，取 $r = R$，可求出漂移

$$\delta V = -R \cdot (g^{*r}_{obs} - g^{*r})\,|_{\partial\Omega} \qquad (4.4.34)$$

式(4.4.34) 是利用虚拟压缩恢复法确定重力位漂移的方程，简称漂移方程。

如果 $\delta V(P)\,|_{\partial\Omega}$ 是常数 δV(这基本上符合实际情况)，则 $R\delta V/r$ 是内部球外部空间 $\overline{K}$ 中的正则调和函数。由于地球表面 $\partial\Omega$(或大地水准面) 非常接近球面(一阶近似)，因此，在一阶近似之下，$R\delta V/r$ 在 $\partial\Omega$ 上的值正好就是 δV(因 $r = R$)。根据唯一性定理，在一阶近似之下，在地球外部空间，$R\delta V/r$ 正好就是由边值 $\delta V(P)\,|_{\partial\Omega} = \delta V$ 确定的场。

当大地水准面重力位常数存在漂移值时，会造成大地水准面本身的漂移，同时也会影响外部重力场。虚拟压缩恢复法给确定大地水准面重力位常数漂移提供了一种简明的途径，通过地面若干个点上的重力观测值(理论上，只需在一个点位上测量出重力的径向分量) 即可根据漂移方程(4.4.34) 分离出漂移值。在实际应用中，为了增加可靠度，可采用多点重力观测(获得径向重力分量)，然后作简单平差处理(在等精度观测的前提下只需要求简单算术平均)。真实重力径向分量值 $g^{*r}(P)$ 可通过绝对重力测量获得，目前的测量精度已达到 $10^{-10} \sim 10^{-11}\,\mathrm{ms}^{-2}$($0.01 \sim 0.001\,\mu\mathrm{Gal}$ 水平)，相当于 0.1 至 0.01 毫米级水平。利用虚拟压缩恢复法得到级数解之后，可通过

差分方法求出带有漂移的重力径向分量值 $g_{obs}^{*r}(P)$。初步的模拟实验结果(申文斌等,2006a)表明,利用虚拟压缩恢复法确定重力位漂移是可行的。不过,最终能否有效应用,还取决于将来的实践。

从原理上讲,漂移方程(4.4.34)的一个典型应用如下。假定已经确定了一个含有重力位漂移 δV 的场,比如 EIGEN-2 模型(Reigber et al., 2003)。根据 EIGEN-2 模型可以计算出地面 $\partial\Omega$ 上的边值 $V_{obs}|_{\partial\Omega}$,并以此为边界值,利用虚拟压缩恢复法得到观测场 V_{obs}^{*},进而利用差分法获得若干个检测点上的观测重力径向分量值 g_{obs}^{*r}。至于 g^{*r},则由实际重力测量获得,通常测量若干个点,取简单算术平均(在等精度测量假定下)。这样,根据漂移方程(4.4.34)即可确定重力位漂移 δV。上述简单方法是否可行,需要实践检验。

4.4.3　利用频移观测量确定高程差的方法

利用频移观测量确定高程差的方法已详细研究过(Shen et al., 1993a,b;金标仁,申文斌,1994),下面叙述基本原理。

根据方程(4.4.12),只要测定了 P 与 Q 两点之间的重力频移 Δf,即可确定出 P 与 Q 之间的重力位差 $\Delta W_{PQ} = W_Q - W_P$。如果测定的是引力频移 Δf_G,则可由下式得到引力位差

$$\Delta V_{PQ} \equiv V_Q - V_P = -\frac{\Delta f_G}{f} \equiv -\frac{f' - f}{f} \qquad (4.4.35)$$

下面考虑如何根据 P 与 Q 之间的重力频移 Δf 求出 P 与 Q 之间的高程差 H。这里的高程是指以大地水准面(等频大地水准面)为参考基准面的高度。不失一般性,假定 $\Delta f > 0$,这时,由方程(4.4.12)得

$$W_Q = W_P - \frac{\Delta f}{f} < W_P \qquad (4.4.36)$$

即 Q 处的重力位在数值上比 P 处的重力位小(因为 W 是物理大地测量中采用的牛顿重力位,取正值,数值小表明位高),而 P 和 Q 可以认为分别位于两个等频面 $W = C_Q$ 和 $W = C_P$ 上。我们用 $W = W_0$ 表示等频大地水准面,那么,P 和 Q 与等频大地水准面之间的重力位差可分别表示成如下形式

$$\Delta W_{0P} = W_P - W_0 = -\frac{\Delta f_{0P}}{f} \qquad (4.4.37)$$

$$\Delta W_{0Q} = W_Q - W_0 = -\frac{\Delta f_{0Q}}{f} \tag{4.4.38}$$

其中 Δf_{0P} 和 Δf_{0Q} 分别是 P 和 Q 点与等频大地水准面之间的重力频移。我们将等频面 $W = C_P$ 在等频大地水准面 $W = W_0$ 处展开

$$W = W_0 + \frac{\partial W}{\partial h} H_P + \cdots \tag{4.4.39}$$

其中，$\partial W/\partial h = -g_P$ 是与 P 点对应的大地水准面上的重力值，H_P 是 P 点的高程。当高程不太大时，方程(4.4.39)只取到一次项，并且可以用平均正常重力 $\bar{\gamma}$ 来代替 g_P，于是有

$$H_P = -\frac{C_P - W_0}{\bar{\gamma}} \tag{4.4.40}$$

同理，Q 点的高程可写成

$$H_Q = -\frac{C_Q - W_0}{\bar{\gamma}} \tag{4.4.41}$$

值得注意的是，方程(4.4.40)和(4.4.41)成立的条件是高程 H 比较小。由方程(4.4.40)和(4.4.41)可求得 P 与 Q 之间的高程差

$$\Delta H = H_Q - H_P = -\frac{C_Q - C_P}{\bar{\gamma}} = -\frac{\Delta W_{PQ}}{\bar{\gamma}} \equiv -\frac{W_Q - W_P}{\bar{\gamma}} \tag{4.4.42}$$

其中 C_P 和 C_Q 分别是过 P 和 Q 的重力等位面上的位常数。

将方程(4.4.12)代入方程(4.4.42)得

$$\Delta H = \frac{1}{\bar{\gamma}} \frac{\Delta f}{f} \tag{4.4.43}$$

其中平均正常重力 $\bar{\gamma}$ 可以近似地用 GM/R^2 来代替(M 是地球质量，R 是地球平均半径，G 是万有引力常数)。这时，方程(4.4.43)可表示成

$$\Delta H = \frac{R^2}{GM} \frac{\Delta f}{f} \tag{4.4.44}$$

将无量纲量 $GM/R = 6.9 \times 10^{-10}$ 以及地球半径 $R = 6.4 \times 10^8 \text{cm}$ 代入方程(4.4.44)，得

$$\Delta H = 9.1 \times 10^{17} \frac{\Delta f}{f} (\mathrm{cm}) \tag{4.4.45}$$

由上述方程可以看出，ΔH的精度取决于频移观测量Δf的精度，因而也就与信号发射器以及接收机的振荡频率的稳定度密切相关。从理论上来说，只要信号发射系统以及信号接收系统的频率稳定度优于10^{-18}，那么，用频移法测定任意两点之间的高差就可达到厘米级精度。如果采用卫星上的发射器作为电磁波信号发射源，则只需地面上的两个或多个接收机的频率稳定度优于10^{-18}，即可使任意两点之间测定的高差达到厘米级精度。这时，对发射器的精度要求可低于对稳定度的要求。目前原子钟的精度可达到10^{-16}量级(Pereira et al., 2002)，但仍然不能满足精度要求。高精度的守时系统不仅可用于测定高程差，还可以用来判定某些基本物理常数(如引力常数，精细结构常数等，其中精细结构常数是描述电磁相互作用的一个基本物理常数，起源于玻尔原子模型，其数值约等于1/137)是否随宇宙的演变而变化(Udem et al.,1997;Schwob et al.,1999;Udem et al., 2002)。20世纪70年代出现的激光以及非线性光谱学技术为制造精密守时系统特别是"光钟"奠定了基础(Udem et al., 2002)。20世纪末到21世纪初，国际上已有好几个研究机构致力于"光钟"的研究，并已通过各种实验证实，利用"光钟"可以使守时稳定度达到$10^{-18} \sim 10^{-19}$(Young et al.,1999;Diddams et al.,2000a,b;Udem et al., 2002;Ma et al.,2004)。科学家预计，在不远的将来即可实现可供科学研究及实际应用的"光钟"。

由上述分析可看出，不论是确定重力位差(4.4.12)，引力位差(4.4.35)，还是高程差(4.4.44)，关键的问题是如何测定重力频移Δf(引力频移Δf_G可根据重力频移Δf求出；反之亦然)，并确定Δf所能达到的精度。这里需要强调，方程(4.4.45)仅适用于平原或比较平缓的地区，在高程差较大的地区(比如山区)，方程(4.4.45)不能用。

在山区，我们将方程(4.4.39)取至H_P的二次项

$$W = W_0 + \frac{\partial W}{\partial h} H_P + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial h^2} H_P^2 \tag{4.4.46}$$

由于 $\partial W/\partial h = -g_P \approx -\gamma$, $\partial^2 W/\partial h^2 \approx 2\gamma/R$,方程(4.4.46)可写成

$$W = W_0 - \gamma H_P + \gamma H_P^2/R \tag{4.4.47}$$

即

$$C_P = W_0 - \gamma H_P + \gamma H_P^2/R \tag{4.4.48}$$

同理有

$$C_Q = W_0 - \gamma H_Q + \gamma H_Q^2/R \tag{4.4.49}$$

由方程(4.4.48)和(4.4.49)得

$$C_Q - C_P = -\gamma(H_Q - H_P) + \frac{\gamma}{R}(H_Q + H_P)(H_Q - H_P) \tag{4.4.50}$$

或

$$-\Delta W_{PQ} = \gamma \Delta H_{PQ} - \frac{\gamma}{R}(H_Q + H_P)\Delta H_{PQ} \tag{4.4.51}$$

其中 ΔH_{PQ} 是 P 与 Q 之间的高程差。

假定 P 是基点,已知 P 点的高程 H_P,那么,只要测定了 P 与 Q 之间的重力频移 Δf_{PQ},即可求出 $\Delta W_{PQ} \equiv C_Q - C_P$;于是,可由方程(4.4.50)或方程(4.4.51)求出 Q 点的高程 H_Q。由方程(4.4.50)得

$$-(C_Q - C_P) = \gamma H_Q - \frac{\gamma}{R}H_Q^2 - \gamma H_P + \frac{\gamma}{R}H_P^2 \tag{4.4.52}$$

令

$$\lambda = -(C_Q - C_P) + \gamma H_P - \frac{\gamma}{R}H_P^2 = -\Delta W_{PQ} + \gamma H_P - \frac{\gamma}{R}H_P^2 \tag{4.4.53}$$

则有

$$\frac{\gamma}{R}H_Q^2 - \gamma H_Q + \lambda = 0 \tag{4.4.54}$$

解方程(4.4.54)得

$$H_Q = \frac{\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4\frac{\gamma}{R}\lambda}}{2\frac{\gamma}{R}} = \frac{R}{2} \pm \frac{R}{2\gamma}\sqrt{\gamma^2 - 4\frac{\gamma}{R}\lambda} \tag{4.4.55}$$

显然,只有下述解是可取的

$$H_Q = \frac{R}{2} - \frac{R}{2\gamma}\sqrt{\gamma^2 - 4\frac{\gamma}{R}\lambda} \tag{4.4.56}$$

将方程(4.4.53)代入方程(4.4.56),得

$$\begin{aligned} H_Q &= \frac{R}{2} - \frac{R}{2\gamma}\left[\gamma^2 - \frac{4\gamma}{R}\left(-\Delta W + \gamma H_P - \frac{\gamma}{R}H_P^2\right)\right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{R}{2} - \frac{R}{2}\left[1 - \frac{4}{R}\left(-\frac{\Delta W}{\gamma} + H_P - \frac{H_P^2}{R}\right)\right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{R}{2} - \frac{R}{2}\left\{1 - \frac{2}{R}\left(-\frac{\Delta W}{\gamma} + H_P - \frac{H_P^2}{R}\right)\right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{8}\left(\frac{4}{R}\right)^2\left(-\frac{\Delta W}{\gamma} + H_P - \frac{H_P^2}{R}\right)^2 + \cdots\right\} \\ &= -\frac{\Delta W}{\gamma} + H_P - \frac{H_P^2}{R} + \frac{1}{R}\left(\frac{\Delta W^2}{\gamma^2} - \frac{2\Delta W}{\gamma}H_P + H_P^2\right) \\ &= H_P - \frac{\Delta W}{\gamma} + \frac{1}{R}\left[\left(\frac{\Delta W}{\gamma}\right)^2 - 2\frac{\Delta W}{\gamma}H_P\right] \end{aligned} \tag{4.4.57}$$

在平原地区,H_P 以及 $\Delta W/\gamma$ 不大,方程(4.4.57)最后一个等号右边的方括号项可忽略,从而得到方程(4.4.42);但在高山地区则要顾及上述方括号项。

4.4.4 用频移法确定地球外部重力场的方法

根据 4.4.1 节的研究,理论上我们可以通过频移观测确定整个地球表面的重力位 W,这里略去了高阶项影响。由 Green 第二公式(4.2.89),取 V 为 W, U 为 $1/|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}|$,注意此时 $\Delta U = 0$,则有

$$\int_\Omega \frac{\Delta W}{|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}|}\mathrm{d}\Omega = \int_{\partial\Omega}\left[\frac{\partial W}{\partial n}\frac{1}{|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}|} - \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}|}\right)W\right]\mathrm{d}\sigma \tag{4.4.58}$$

其中,Ω 是整个地球域,也用它表示地球体积,$\partial\Omega$ 是地球表面,$\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{r}'$ 分别是地球质心(坐标原点)至场点和积分元(流动点)的向径。由于

$$\Delta W = \Delta(V + Q) = -4\pi G\rho + 2\omega^2 \tag{4.4.59}$$

其中,Δ 是 Laplace 算子,V 是引力位,Q 是离心力位,G 是引力常数,

ρ 是地球密度。因此，我们有

$$-4\pi V+\frac{2\omega^2\Omega}{r}=\int_{\partial\Omega}\left[\frac{g_n}{|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}|}-\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}|}\right)W\right]\mathrm{d}\sigma \tag{4.4.60}$$

其中，g_n 是地面重力的法向分量，法向指向地面的外部。将 $V=W-Q$ 代入方程(4.4.60)，有

$$W(x,y,z)=\frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2)+\frac{\omega^2\Omega}{2\pi r}-\frac{1}{4\pi}\int_{\partial\Omega}\left[\frac{g_n}{|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}|}-\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}|}\right)W\right]\mathrm{d}\sigma \tag{4.4.61}$$

根据方程(4.4.61)，只要确定了地球的表面形状 $\partial\Omega$，测定了地球表面 $\partial\Omega$ 上的重力位和重力 $\boldsymbol{g}$ 的法线分量 g_n，就可求出整个外部空间的重力位，从而求出整个外部空间的重力场。

实际上，如果利用 Green 基本定理(伊捷尔松，1963；管泽霖，宁津生，1981)，无须测定重力即可求出外部空间的重力位

$$W(x,y,z)=-\frac{1}{4\pi}\int_{\partial\Omega}(W-Q)\frac{\partial G_f}{\partial n}\mathrm{d}\sigma+Q(x,y,z) \tag{4.4.62}$$

其中，积分号下的 $W-Q$ 在 $\partial\Omega$ 上取值(重力位 W 是观测量，离心力位 Q 是已知量)，G_f 是 Green 函数，法线 $\boldsymbol{n}$ 指向曲面 $\partial\Omega$ 的外部。

作为一级近似，把地球表面看做圆球，则 Green 函数 G_f 由下式给出(Heiskanen and Moritz，1967；管泽霖，宁津生，1981)

$$G_f=\frac{R}{|\boldsymbol{r}|}\frac{1}{|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_c|}-\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \tag{4.4.63}$$

其中，$\boldsymbol{r}_c$ 是地球质心至场点关于球面的共轭点的向径，R 是地球半径，$\boldsymbol{r}_c$ 与 $\boldsymbol{r}$ 的方向相同，其大小满足如下关系

$$r_c r=R^2 \tag{4.4.64}$$

利用球面上的格林函数(4.4.63)，并计算出 $\partial G_f/\partial n$，然后代入方程(4.4.62)，可得到著名的 Poisson 积分(伊捷尔松，1963)

$$W=\frac{1}{4\pi R}\int_{\partial K}(W-Q)\frac{r^2-R^2}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\mathrm{d}\sigma+Q \tag{4.4.65}$$

其中，∂K 表示半径为 R 的球面，积分号下的量$(W-Q)$在地球表面

取值。

由于重力位 W 可通过频移法观测，而离心力位 Q 是已知的，因此，利用 Poisson 积分(4.4.65)可以求出整个地球外部的重力位。引力位可写成

$$V = \frac{1}{4\pi}\int_{\partial K}(W - Q)\frac{r^2 - R^2}{R\,|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3}\mathrm{d}\sigma \tag{4.4.66}$$

或者

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi}\int_{\partial K}(W - Q)\frac{r^2 - R^2}{R\,|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3}\mathrm{d}\sigma \tag{4.4.67}$$

上述方程给出了第一牛顿引力位。有了第一牛顿引力位，再利用方程(4.3.21)可求出 g_{00}:

$$\begin{aligned} g_{00} = &-1 - 2\varphi + \omega^2(x^2 + y^2) - 2\varphi^2 \\ &- 2\omega^2(x^2 + y^2)\varphi - \frac{4G}{r^3}J\omega(x^2 + y^2) \end{aligned} \tag{4.4.68}$$

这里略去了 -2ψ 项。再利用方程(4.2.36)，得

$$\begin{aligned} g_{01} &= \frac{4G}{r^3}Jy - 2\omega y(1 - 2\varphi) \\ g_{02} &= -\frac{4G}{r^3}Jx + 2\omega x(1 - 2\varphi) \\ g_{03} &= 0 \\ g_{ij} &= (1 - 2\varphi)\delta_{ij} \end{aligned} \tag{4.4.69}$$

其中，g_{01}，g_{02}，g_{03} 又可合写成

$$g_{0i} = -\frac{4G}{r^3}(\boldsymbol{J} \times \boldsymbol{x})_i + 2(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{x})_i(1 - 2\varphi) \tag{4.4.70}$$

至此求出了相对论重力场 $g_{\mu\nu}$。

值得注意，上述解是在球面近似下完成的。如果要严格地限定在地球表面 $\partial\Omega$ 上进行积分，那么，最重要的问题是如何求定 Green 函数 G_f。由于地球表面极为复杂，因此求解严格的 G_f 几乎是不可能的。为此，我们可考虑如下的近似解法。

根据地面上的观测值 W 可求出地面上的引力位 V。在地球外部，引力位 V 满足拉普拉斯方程，因此我们可以求解外部 Dirichlet 问题

$$\Delta V = 0 \tag{4.4.71}$$

$$V|_{\partial\Omega} = f(r, \theta, \lambda) \tag{4.4.72}$$

方程(4.4.71)的外部球函数解为(伊捷尔松，1963；Heiskanen

and Moritz,1967):

$$V(r,\theta,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \sum_{m=0}^{n} (a_{nm}\cos m\lambda + b_{nm}\sin m\lambda) P_{nm}(\cos\theta) \tag{4.4.73}$$

其中,(r,θ,λ) 是场点的球坐标,$P_{nm}(\cos\theta)$ 是 Legendre 缔合函数,由下式给出

$$P_{nm}(\cos\theta) = \frac{1}{2^n n!}(1-\cos^2\theta)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{n+m}}{d(\cos\theta)^{n+m}}(\cos^2\theta - 1)^n \tag{4.4.74}$$

将边界条件(4.4.72)离散化,有

$$V(P_{ij}) = f(r_{ij},\theta_i,\lambda_j),\ P_{ij} \in \partial\Omega \tag{4.4.75}$$

其中 $P_{ij} = (r_{ij},\theta_i,\lambda_j)$ 是第 ij 个网格中心点的坐标。

参见图4.4.3,网格可按如下方式划分(Shen,2005c;李进,2005;申文斌等,2006b,c,d):在地球内部取一个与地球质心重合的单位球,将单位球面按纬线 θ_i 和经线 λ_j 划分为格网(即经纬线格网),然后将单位球面上的格网沿径向向外辐射,在地球表面 $\partial\Omega$ 截出相应的网格,以指标 i 和 j 作为网格的标记符号。

将级数(4.4.73)截断至 N 阶,即

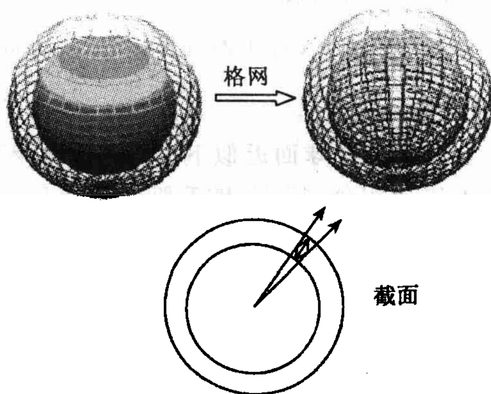


图 4.4.3　网格化示意图(取自申文斌,李进,2005)

$$V(r,\theta,\lambda) = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{r^{n+1}} \sum_{m=0}^{n} (a_{nm}\cos m\lambda + b_{nm}\sin m\lambda) P_{nm}(\cos\theta) \tag{4.4.76}$$

将边界条件(4.4.75)代入上述方程，得

$$V(r_{ij},\theta_i,\lambda_j) = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{r_{ij}^{n+1}} \sum_{m=0}^{n} (a_{nm}\cos m\lambda_j + b_{nm}\sin m\lambda_j) P_{nm}(\cos\theta_i) \tag{4.4.77}$$

求解上述线性方程组，可确定有限个球谐系数 a_{nm} 和 b_{nm}，只要网格划分得足够小(因而方程数足够多)即可。但在实际应用中，边界值(4.4.75)是有误差的，这时需要寻求方程(4.4.77)的最小二乘解，或更确切地说是求解出最佳拟合系数 $\bar{a}_{nm}$ 和 $\bar{b}_{nm}$，最后得到如下解

$$V(r,\theta,\lambda) = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{r^{n+1}} \sum_{m=0}^{n} [\bar{a}_{nm}\cos m\lambda + \bar{b}_{nm}\sin m\lambda] P_{nm}(\cos\theta) \tag{4.4.78}$$

以上根据地面重力数据求解位系数的方法是目前普遍采用的方法，最广泛应用的是由地面格网化平均重力异常数据 Δg_{ij} 求解完全规格化位系数 $\{\bar{C}_{nm},\bar{S}_{nm}\}$，这是一种离散化数值方法，通常还要考虑选择平滑因子削弱离散误差(参见李建成等，2003)。

还有一种根据边界值求解外部场的方法——虚拟压缩恢复法(申文斌，2004)，该法的有效性和可靠性已通过多种实验检验证实(参见钟秋菊，2006；李进，2005；Shen, 2005a,b；申文斌，李进，2005；申文斌等，2006b,c,d)。该法的优越性在于：基于该法可以解决重力场的向下延拓的欠稳定性问题(Shen，2005a，2006)。

4.5　实现全球高程基准统一的方法

4.5.1　利用 GPS 信号确定重力位差的方法

申文斌等(参见 Shen et al.，1993a；申文斌等，1994)曾提出利用 GPS 卫星信号测定重力频移，进而确定重力位差以及地面点高程的

思想。通过对 GPS 卫星信号的频移观测来确定地面点高程,可以不受地理条件和环境等限制,甚至可以实现两个大陆之间的高程统一(Shen and Ning,2005;Shen,2005c)。

这种方法的理论基础是重力频移方程,即 4.4 节中的方程(4.4.13)

$$\Delta W = -\frac{\Delta f_g}{f} \tag{4.5.1}$$

其中 ΔW 是两个地面测站之间的重力位差,Δf_g 是两个地面测站所测卫星信号的重力频移之差,f 是 GPS 卫星发射电磁波信号的频率。

假如确定了重力频移,即可利用方程(4.5.1)确定重力位差,进而可确定高程或高程差。卫星信号的频移实际上包含多种因素的影响,这些影响大体上可分为经典多普勒频移、重力频移、电离层多普勒频移、对流层多普勒频移、原子钟误差等,其中经典多普勒频移占的份额最大。因此,在频移测量中,需要考虑各种误差影响,其中经典多普勒效应是最主要的误差源。为了得到我们所需的重力频移信号,可采用适当的方法将其他频移成份消除或最大程度地削弱。

4.5.2 GPS 信号频移测量的误差源分析

考虑引起卫星信号频移的主要因素,总的频移 Δf 可表示为(Kleppner et al.,1970)

$$\Delta f = \Delta f_d + \Delta f_v + \Delta f_h + \Delta f_i + \Delta f_t + \Delta f_c + \Delta f_r \tag{4.5.2}$$

式中,Δf_d 和 Δf_h 分别是一阶多普勒频移(或经典多普勒频移)和横向多普勒频移,Δf_v 是引力频移,Δf_i 是电离层多普勒频移,Δf_t 是对流层折射频移,Δf_c 是原子钟误差,Δf_r 是随机误差。引力频移与横向多普勒频移之和是重力频移(Kleppner et al., 1970; 金标仁等, 1994),记为 Δf_g。

在各项频移中,经典多普勒频移的量级最大,比引力频移项至少高 4 个数量级(冯瑮,2007);其次是横向多普勒频移和电离层多普勒频移。对流层折射较引力频移小两个数量级。原子钟误差最小,取决于守时系统的精度,采用的原子钟精度越高,测量精度越高,相应地,成本也越大。随机误差可通过多次观测消除或削弱。就目前的

目的而言，我们真正需要的是重力频移(即引力频移与横向多普勒频移之和)，而将其他的频移看作干扰。要获得精确的重力频移，就需要采取有效的方法来消除或大大地削弱经典多普勒频移。

4.5.3　多普勒频移消除法

由上一节得知经典多普勒频移是频移总量中的主要成分，用模型或公式来改正，仍然存在很大的残差。为了解决这一问题，我们利用多普勒消除技术(Kleppner et al.,1970;Jaffe,1976;Vessot and Levine,1979;Vessot et al.,1980;Ashby,1998;冯瑔,2007;申文斌,冯瑔等,2008a)，这种技术能够很好地消减经典多普勒效应的影响，并且理论上还可以同时消除电离层多普勒频移和对流层折射效应。多普勒消除技术首先应用于 1976 年验证相对论等效原理的实验(Vessot et al.,1980)。下面基于这种技术来论述有效获取重力频移的方法(申文斌，冯瑔等，2008*a*)。

如图 4.5.1 所示，在地心恒星参考系中，S 是绕地球飞行的卫星，P 是地球表面或外部空间中的一基站。S 和 P 处都放置了相同的原子钟。t_1 时刻，基站 P 向卫星发射频率为 f_1(它等于 P 处原子钟的固有频率 f_P)的电磁波信号，记作信号 a。t_2 时刻，卫星接收到基站的信号 f'_1，并立即转发给基站，同时还发出频率为 f_s(原子钟在 S 处的固有频率)的信号，记作信号 b。时刻 t_3，基站 P 运行到 P' 时，接收到这两种信号 f''_1 和 f'_s。上述过程可简明地用如下形式表述：

$$\text{信号 a:}\quad \frac{f_1}{P}\xrightarrow{1}\frac{f'_1}{S}\xrightarrow{2}\frac{f''_1}{P'}$$

$$\text{信号 b:}\quad \frac{f_s}{S}\xrightarrow{3}\frac{f'_s}{P'} \tag{4.5.3}$$

其中分母表示发射机或接收器，分子表示发射频率或接收频率，箭头上的数字表示信号传递过程的路径标号，简称过程标号：三条路径，对应三个过程。

现在，(基站)发射频率为 f_1 时，(卫星)接收频率为 f'_1；(卫星)发射频率为 f'_1 和 f_s 时，(基站)接收频率分别为 f''_1 和 f'_s。于是，基于方程(4.5.2)，可以写出如下关系：

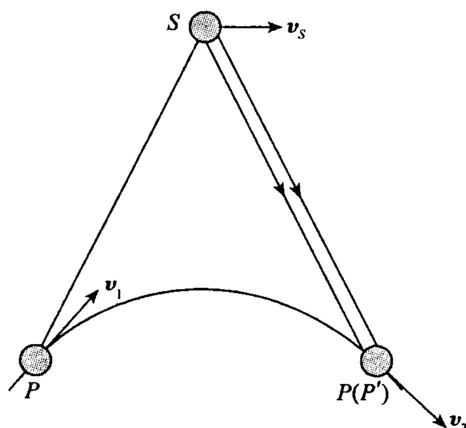


图 4.5.1 S 是卫星在 t_2 时刻的位置，P 和 P′ 分别是基站在 t_1 和 t_3 时刻的位置，v_S，v_1，v_3 分别是对应时刻卫星（t_2 时刻）以及基站（t_1 和 t_3 时刻）相对地心的速度

$$f'_1 = f_1 + \Delta f_{d1} + \Delta f_{v1} + \Delta f_{h1} + \Delta f_{i1} + \Delta f_{t1} + \Delta f_{c1} + \Delta f_{r1} \tag{4.5.4}$$

$$f''_1 = f'_1 + \Delta f_{d2} + \Delta f_{v2} + \Delta f_{h2} + \Delta f_{i2} + \Delta f_{t2} + \Delta f_{r2} \tag{4.5.5}$$

$$f'_s = f_1 + \Delta f_{d3} + \Delta f_{v3} + \Delta f_{h3} + \Delta f_{i3} + \Delta f_{t3} + \Delta f_{cs} + \Delta f_{r3} \tag{4.5.6}$$

以上方程中，Δf_{dj}、Δf_{vj}、Δf_{hj}、Δf_{ij}、Δf_{tj}、Δf_{rj}（$j = 1,2,3$ 表示信号传播的三个过程）分别是对应信号之间的多普勒频移、引力频移、卫星与基站之间的横向多普勒频移、电离层效应、对流层效应、随机观测误差，Δf_{c1}、Δf_{cs} 分别是基站和卫星原子钟的频率误差。

方程(4.5.4)和方程(4.5.5)分别描述了信号 a 在过程 1 和 2 中的频移，方程(4.5.6)描述了信号 b 在过程 3 中的频移（忽略了基站不同时刻的原子钟守时速率差异）。由于信号 a 和信号 b 在整个过程中经历的时间极短，可以近似认为 Δf_{dj}（$j = 1,2,3$）全都相等。Δf_{ij}、Δf_{tj} 可作同样处理。需要说明的是，Δf_{v1} 与 Δf_{v2}、Δf_{v3} 绝对值相同、符号相反。这些近似处理的误差后面将会详细讨论。

基于方程(4.5.4) ~ (4.5.6),得

$$f'_s - f_s - \left(\frac{f''_1}{2} - \frac{f_1}{2}\right) = \Delta f_v + \Delta f_r + \Delta f_c \qquad (4.5.7)$$

其中 Δf_r 是随机观测误差之和。方程(4.5.7)已将多普勒频移、电离层效应、对流层效应当消去,仅含有引力频移、钟误差和随机观测误差。重写方程(4.5.7),需要提取的引力频移可表示为

$$\Delta f_v = f'_s - f_s - \left(\frac{f''_1}{2} - \frac{f_1}{2}\right) - \Delta f_c + \Delta f_r \qquad (4.5.8)$$

利用多普勒消除法在测站 A、B 同时观测同一颗卫星,则得到两个引力频移之差 $\Delta f_{vAB} = \Delta f_{vB} - \Delta f_{vA}$,其中 Δf_{vA} 和 Δf_{vB} 由方程(4.5.8)确定。类似于重力频移方程(4.5.1),基于 Δf_{vAB} 可求出 A 与 B 之间的引力位差

$$\Delta V_{AB} \equiv V_B - V_A = -\frac{f_{vAB}}{f} \qquad (4.5.9)$$

下面讨论误差影响。为了便于计算,假设 GPS 卫星是轨道半径为 $r_s = 30000\text{km}$ 的理想圆轨道卫星。卫星在地心系中的运动参数见表 4.5.1。

设 t_1 时刻,基站在 P 处相对于地心的速度为 v_p,相对于卫星的速度为 v_{sp},在地心系中卫星和基站的法向加速度和切向加速度分别为 $\boldsymbol{a}'_n$、$\boldsymbol{a}'_t$ 和 $\boldsymbol{a}_n$、$\boldsymbol{a}_t$(见图 4.5.2),基站到卫星的距离为 $\boldsymbol{r}_{sp}$。

表 4.5.1 **卫星在地心惯性系中的运动参数**

参量	速度 v_s(m/s)	法向加速度 a'_n(m/s²)	切向加速度 a'_t(m/s²)
数值	3643	0.44	10^{-4}

1. 考察电离层和对流层的影响

在 $\Delta t = t_3 - t_1$ 时间内,基站相对于卫星的位移

$$S \approx \boldsymbol{v}_{sp}\Delta t + \frac{1}{2}\boldsymbol{a}_{sp}\Delta t^2 \qquad (4.5.10)$$

其中 $\boldsymbol{a}_{sp}$ 是基站相对于卫星的加速度。显然,有如下估计式

$$|\boldsymbol{a}_{sp}| \leqslant |\boldsymbol{a}_s| + |\boldsymbol{a}_p| = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} + \sqrt{a'^2_n + a'^2_t} \qquad (4.5.11)$$

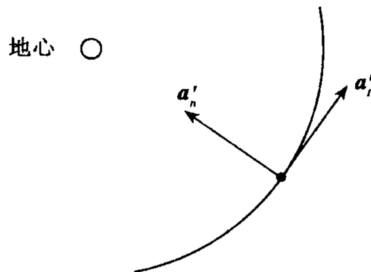


图 4.5.2　a'_t,a'_n分别为卫星的切向加速度及法向加速度
（基站在图中没有画出）

$$|\boldsymbol{v}_{sp}| \leqslant |\boldsymbol{v}_s| + |\boldsymbol{v}_p| \tag{4.5.12}$$

$$|\boldsymbol{S}| \leqslant |\boldsymbol{v}_{sp}|\Delta t + \frac{1}{2}|\boldsymbol{a}_{sp}|\Delta t^2 \tag{4.5.13}$$

以位于赤道的地面基站为例，所取的数据和计算结果见表 4.5.2。

表 4.5.2　**计算地面基站位移大小的数据及结果**

参量	数值
卫星至基站距离 r_{sp}(km)	15000
信号传播时间 Δt(s)	0.05
基站速度 v_p(m/s)	463
基站切向加速度 a_t(m/s^2)	0.1
基站法向加速度 a_n(m/s^2)	3.37×10^{-3}
基站在地心系中的位移(m)	$S < 205.3$

以上计算结果表明，在信号传播的短暂时间里，地面基站相对于卫星的位移在 1km 以下。在 1km 的横向距离上，大气层的差异通常是可以忽略的，大气层的变化也完全可以忽略不计。也就是说，在信号传播过程中大气层近似看成是静态的。考虑光路可逆原理，电磁波在近似静态的大气层中传播也应当是可逆的，因而将大气层对上

行和下行电磁波的影响看做相同。

由电离层和对流层引起的误差较难估计，但根据我们所采用的模型，由电离层和对流层的变化引起的频移量的剩余误差可以忽略，不会给方程(4.5.8)的精度带来影响。

2. 多普勒剩余影响

多普勒频移 $\Delta f_{dj}(j=1,2,3)$ 带来的剩余误差为

$$\delta f_d = \Delta f_{d3} - \frac{1}{2}(\Delta f_{d1} + \Delta f_{d2}) \tag{4.5.14}$$

其中，$\Delta f_{d1} = \frac{f_p}{c}v_{1r}$，$\Delta f_{d2} = \frac{f_p}{c}v_{2r}$，$\Delta f_{d3} = \frac{f_s}{c}v_{2r}$。忽略二阶小量，得

$$\begin{aligned}\delta f_d &= \frac{1}{2c}(\Delta f_h v_{1r} + f_p \Delta v_r) \approx \frac{1}{2c}(\Delta f_h v_{1r} + f_p a_r \Delta t) \\ &= \frac{f_s v_{1r}}{4c^3}(v_s^2 - v_p^2) + \frac{1}{2c}f_p a_r \Delta t\end{aligned} \tag{4.5.15}$$

其中，v_{1r} 和 a_r 分别是 t_1 时刻基站相对于卫星的径向速度和径向加速度。若忽略上式右边第一项，则有 $\delta f_d/f_p = a_r\Delta t/2c$，其大小主要取决于基站加速度和信号传播时间。因此，计算误差为 $\sigma_d = v_{1r}(v_s^2 - v_p^2)/4c^3$。

考虑基站在地球表面的情况，利用表 4.5.2 中的数据计算，结果如表 4.5.3 所示。

表 4.5.3　地表基站的一阶多普勒残余误差的计算结果

a_r(m/s²)	v_{1r}(m/s)	$\delta f_d/f_p$	$\delta f_d/f_p$ 的精度
≤ 0.54	≤ 4106	$\leq 4.52\times10^{-11}$	5×10^{-16}

计算结果表明，由基站加速度引起的一阶多普勒频移残余误差是不能忽略的，提取引力频移量时需要考虑这一项改正。

3. 引力频移模型误差影响

引力频移模型给方程(4.5.9)带来的剩余误差为

$$\delta f_v = -\frac{1}{2}(\Delta f_{v1} + \Delta f_{v2}) \tag{4.5.16}$$

把 $\Delta f_{v1} = -\frac{f_p}{c^2}\Delta V_{12}$，$\Delta f_{v2} = \frac{f_p}{c^2}\Delta V_{23}$ 代入上式，得

$$\frac{\delta f_v}{f_p} = \frac{V_{p'} - V_p}{2c^2} \tag{4.5.17}$$

其大小主要取决于基站在 t_1、t_2 时刻引力位 V_P 与 $V_{P'}$ 的差异。

将地球引力位取零阶项

$$\frac{\delta f_v}{f_p} \approx \frac{1}{2c^2}\left(\frac{GM}{r_p} - \frac{GM}{r_{p'}}\right) = \frac{GM}{2c^2}\frac{(r_{p'} - r_p)}{r_p r_{p'}} \tag{4.5.18}$$

上式的误差约为

$$\sigma_v = \frac{GMJ_2a^2}{2c^2}\left[\frac{P_2(\sin\delta')}{r_{p'}^3} - \frac{P_2(\sin\delta)}{r_p^3}\right] \tag{4.5.19}$$

其中，$J_2 = 1082.628 \times 10^{-6}$ 是二阶带谐球谐函数的系数（方俊，1975），也即动力学形状因子（参见 1.1.2 节），a 是地球赤道平均半径，$P_2(\sin\delta)$ 是二阶 Legendre 函数，可表示为$(3\sin\delta - 1)/2$，δ 和 δ' 分别是基站在 P 和 P' 处的纬度。

当基站位于地球表面时，设 $r_{p'} - r_p = 10\text{m}$，基站的纬度近似不变，设为 30°，计算得 $\delta f_v / f_p = -1.74 \times 10^{-16}$，此结果精度在 10^{-16} 量级，比引力频移小 5 ~ 6 个量级，故将它作为引力频移的误差看待。

为了对方程（4.5.8）进行精度分析，本文作出如下假设：观测值的精度与观测条件、仪器设备的种类有关，假设观测精度足够高，达到原子钟的精度，f'_s和f''_1的观测误差分别记为 $\Delta f'_s$和 $\Delta f''_1$；Δf_h 是计算出来的值，假设采用足够高精度的卫星星历计算，使其能够达到原子钟的精度；随机误差 Δf_r 的量级不会超过前面几项，同样取决于原子钟的精度。

目前国内精度最高的铯原子喷泉钟的频率准确度为 4.4×10^{-15}（王正明，2004；王义遒，2005），而国际上则达到了 6×10^{-16}（Heavner et al.，2005a）。按精度 6×10^{-16} 计算，方程（4.5.8）中各项的精度总结如表 4.5.4。

表 4.5.4　　各项的精度汇总

参量	系数	相对精度
$\Delta f'_s$	1	6×10^{-16}
$\Delta f''_1$	$-1/2$	6×10^{-16}
Δf_h	-1	6×10^{-16}
Δf_{c1}	$1/2$	6×10^{-16}
Δf_{cs}	-1	6×10^{-16}
σ_d	-1	$4.9\times10^{-16}\sim6.8\times10^{-17}$
δf_v	-1	$-7.5\times10^{-16}\sim-2.3\times10^{-17}$
Δf_r	1	6×10^{-16}

利用表 4.5.4 给出的数据，可知方程(4.5.9) 的精度为$(3.7\sim6.1)\times10^{-15}$。

理论上，多普勒消除技术可以同时消除多普勒频移、电离层以及对流层折射效应。此外，利用两个地面测站联合观测还可以消除卫星钟误差。

需要指出，在高精度测量中，除了前面所列举的影响因素，还需要考虑包括太阳、月球等天体的引力作用以及潮汐等影响(Kleppner et al.,1970)。

要提高信号频移测量的精度，一方面需要更精密的模型，另一方面需提高原子钟的频率准确度。我们的精度估计基于目前国际上精度最高的铯原子喷泉钟的频率准确度 6×10^{-16}。按照此精度计算，所测量的高程差的精度大约为 1 米量级，这在高山地区具有实用价值。随着时频科学技术的发展，有望更大幅度地提高原子钟频率的准确度(例如达到 10^{-16} 至 10^{-17})，因而也就能大幅度地提升多普勒消除法的精度。

4.5.4　全球高程基准的统一

假定某一点 A 是国际基准点，它位于大地水准面上。由 A 出发，利用频移测量手段，可实现全球高程基准统一。

具体地说，基于重力频移方程，可通过两个接收机接收GPS卫星信号确定频移观测量，由此可确定任意两点之间的重力位差，进而确定高程差。特别是在由海洋隔开的两个大陆之间，采用GPS卫星信号频移法可以实现两个大陆之间的高程连接，实现全球高程基准统一。

4.6 轨道陀螺效应以及探测地球引力场精细结构的可能性

在3.6.4节我们曾经讨论了爱因斯坦引力（后牛顿近似）的性质，它不仅具有通常意义下的引力效应，而且具有引力磁效应。引力效应类似于电场力效应，引力磁效应类似于磁场力效应。静止质量产生引力场，类似于静止电荷产生电（力）场。运动质量产生附加的引磁力场，类似于运动电荷产生附加的磁场。正是由于引力磁效应，一个带有自旋的陀螺在引力场中运动，其自旋轴要发生运动。我们曾经在Schwarzschild度规场中讨论了粒子自旋的进动效应（见3.5.7节）。如果仅仅是为了探讨地球自转轴的进动效应，那里的讨论就足够了。但如果为了探测地球引力场的精细结构，则必须考虑地球引力场的不规则部分对轨道陀螺的影响。Pugh(1959)以及Schiff(1960a, b)曾经建议将一个陀螺（如卫星）放入绕地轨道，并利用其自旋进动来探测地球引力场的精细结构。下面我们首先给出陀螺在后牛顿近似下的运动方程，然后讨论探测地球引力场精细结构的可能性。

我们曾经在3.3.3节利用对应原理写出了自旋运动方程

$$D_\tau S_\mu = 0 \tag{4.6.1}$$

这个方程在不存在引力时是正确的，即

$$\partial_\tau S_\mu = 0 \tag{4.6.2}$$

当存在引力时，将∂_τ换成协变标量导数算子D_τ后也正确。利用协变标量导数算子D_τ的定义（参见3.2.6节），将方程(4.6.1)展开就是

$$\frac{dS_\mu}{d\tau} - \Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}\frac{dx^\nu}{d\tau}S_\sigma = 0 \tag{4.6.3}$$

满足条件

$$S_\mu \frac{dx^\mu}{d\tau} = 0 \tag{4.6.4}$$

因为上式在随陀螺一起运动的局部惯性系中成立，又因上式是标量（零阶张量）方程，因而在任意参考系中也成立。方程(4.6.4)又可写成

$$S_i \frac{dx^i}{dt} + S_0 = 0 \tag{4.6.5}$$

因此

$$S_0 = -S_i v^i \tag{4.6.6}$$

又由方程(4.6.3)，得

$$\begin{aligned}\frac{dS_i}{dt} &= \Gamma^\sigma{}_{i\nu}\frac{dx^\nu}{dt}S_\sigma = \Gamma^\sigma{}_{i0}S_\sigma + \Gamma^\sigma{}_{ij}v^jS_\sigma \\ &= \Gamma^0{}_{i0}S_0 + \Gamma^j{}_{i0}S_j + \Gamma^0{}_{ij}v^jS_0 + \Gamma^k{}_{ij}v^jS_k\end{aligned} \tag{4.6.7}$$

将方程(4.6.6)代入上式，准确到 v^3/r，注意到$\Gamma^0{}_{ij} = 0$（参见3.6.1节），得

$$\begin{aligned}\frac{dS_i}{dt} &= \Gamma^0{}_{i0}(-S_kv^k) + \Gamma^k{}_{i0}S_k + \Gamma^k{}_{ij}v^jS_k \\ &= (-v^k\overset{2}{\Gamma}{}_{i0} + \overset{3}{\Gamma}{}^k{}_{i0} + v^j\overset{2}{\Gamma}{}^k{}_{ij})S_k\end{aligned} \tag{4.6.8}$$

将仿射联络（即 Christoffel 符号）的分量表达式(3.6.70)代入方程(4.6.8)并提升 i 指标，得

$$\begin{aligned}\frac{dS^i}{dt} &= \Big[-v^k\partial^i\varphi + \frac{1}{2}(\partial^i\zeta^k - \partial^k\zeta^i) - \delta^{ki}\partial_t\varphi \\ &\quad + v^j(-\delta^{ik}\partial_j\varphi - \delta_j{}^k\partial^i\varphi + \delta_j{}^i\partial^k\varphi)\Big]S_k \\ &= \frac{1}{2}(\partial^i\zeta_k - \partial_k\zeta^i)S^k - S^i\partial_t\varphi - \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{S}\partial^i\varphi \\ &\quad - S^i(\boldsymbol{v}\cdot\nabla\varphi) - \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{S}\partial^i\varphi + v^i(\boldsymbol{S}\cdot\nabla\varphi)\end{aligned} \tag{4.6.9}$$

又

$$\begin{aligned}(\partial^1\zeta_k - \partial_k\zeta^1)S^k &= S^1\partial^1\zeta_1 + S^2\partial^1\zeta_2 + S^3\partial^1\zeta_3 - \\ &\quad S^1\partial_1\zeta^1 - S^2\partial_2\zeta^1 - S^3\partial_3\zeta^1 \\ &= S^2(\partial^1\zeta_2 - \partial_2\zeta^1) - S^3(\partial_3\zeta^1 - \partial^1\zeta_3) \\ &= S^2(\nabla\times\boldsymbol{\zeta})^{(3)} - S^3(\nabla\times\boldsymbol{\zeta})^{(2)}\end{aligned}$$

$$= [\boldsymbol{S} \times (\nabla \times \boldsymbol{\zeta})]^{(1)} \tag{4.6.10}$$

其中上标(i)表示第i个分量。同理

$$(\partial^2 \zeta_k - \partial_k \zeta^2) S^k = [\boldsymbol{S} \times (\nabla \times \boldsymbol{\zeta})]^{(2)}$$

$$(\partial^3 \zeta_k - \partial_k \zeta^3) S^k = [\boldsymbol{S} \times (\nabla \times \boldsymbol{\zeta})]^{(3)} \tag{4.6.11}$$

即

$$(\partial^i \zeta_k - \partial_k \zeta^i) S^k = [\boldsymbol{S} \times (\nabla \times \boldsymbol{\zeta})]^{(i)} \tag{4.6.12}$$

将方程(4.6.9)写成矢量形式,顾及方程(4.6.12),得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\boldsymbol{S} \times (\nabla \times \boldsymbol{\zeta}) - \boldsymbol{S}\frac{\partial \varphi}{\partial t} - 2(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{S})\nabla\varphi$$

$$- \boldsymbol{S}(\boldsymbol{v} \cdot \nabla\varphi) + \boldsymbol{v}(\boldsymbol{S} \cdot \nabla\varphi) \tag{4.6.13}$$

这就是自旋$\boldsymbol{S}$所满足的方程。

由方程(4.6.13)可以看出,在一般参考系中,陀螺自旋随时间而变。当然,根据等效原理,在随同陀螺一起运动的局部惯性系中,陀螺的自旋是恒定的。因此,为了观测陀螺的进动效应,通常总是选定相对恒星定向的参考系。

为了求解方程(4.6.13),引进新的自旋矢量(Weinberg,1972)

$$\boldsymbol{S}' = (1 + \varphi)\boldsymbol{S} - \frac{1}{2}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{S}) \tag{4.6.14}$$

由上式,得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{S}'}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{S} + (1 + \varphi)\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\mathrm{d}t} - \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{S})$$

$$- \frac{1}{2}\boldsymbol{v}\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} \cdot \boldsymbol{S} + \boldsymbol{v} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\mathrm{d}t}\right)$$

$$= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \partial_i \varphi \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}\right)\boldsymbol{S} + \cdots$$

$$= \frac{\partial \varphi}{\partial t}\boldsymbol{S} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla\varphi)\boldsymbol{S} + (1 + \varphi)\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\mathrm{d}t} - \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{S})$$

$$- \frac{1}{2}\boldsymbol{v}\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} \cdot \boldsymbol{S} + \boldsymbol{v} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\mathrm{d}t}\right) \tag{4.6.15}$$

我们曾经在3.6.2节写出了质点的运动方程

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = -\nabla(\varphi + 2\varphi^2 + \psi) - \frac{\partial \boldsymbol{\zeta}}{\partial t} + \boldsymbol{v} \times (\nabla \times \boldsymbol{\zeta})$$

$$+3\boldsymbol{v}\frac{\partial\varphi}{\partial t}+4\boldsymbol{v}(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\varphi-v^2\nabla\varphi \tag{4.6.16}$$

将陀螺视为质点，上述方程也成立（它描述陀螺的运动轨迹）。若将方程(4.6.15)的精度限定在$(v^3/r)\boldsymbol{S}$量级，那么，将方程(4.6.16)代入方程(4.6.15)之后，略去高于$(v^3/r)\boldsymbol{S}$的项，则有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{S}'}{\mathrm{d}t}&=\frac{\partial\varphi}{\partial t}\boldsymbol{S}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla\varphi)\boldsymbol{S}+(1+\varphi)\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\mathrm{d}t}\\&\quad+\frac{1}{2}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{S})\nabla\varphi+\frac{1}{2}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{S}\cdot\nabla\varphi)-\frac{1}{2}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{v}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\mathrm{d}t})\end{aligned} \tag{4.6.17}$$

根据方程(4.6.13)，$\mathrm{d}\boldsymbol{S}/\mathrm{d}t$具有量级$(v^3/r)\boldsymbol{S}$，因此，准确到$(v^3/r)\boldsymbol{S}$，方程(4.6.17)又可改写成（同时将方程(4.6.13)代入方程(4.6.17)之中）如下形式：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{S}'}{\mathrm{d}t}&=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\mathrm{d}t}+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla\varphi\right)\boldsymbol{S}+\frac{1}{2}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{S})\nabla\varphi+\frac{1}{2}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{S}\cdot\nabla\varphi)\\&=\frac{1}{2}\boldsymbol{S}\times(\nabla\times\boldsymbol{\zeta})-2(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{S})\nabla\varphi+\boldsymbol{v}(\boldsymbol{S}\cdot\nabla\varphi)\\&\quad+\frac{1}{2}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{S})\nabla\varphi+\frac{1}{2}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{S}\cdot\nabla\varphi)\\&=\frac{1}{2}\boldsymbol{S}\times(\nabla\times\boldsymbol{\zeta})-\frac{3}{2}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{S})\nabla\varphi+\frac{3}{2}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{S}\cdot\nabla\varphi)\\&=-\frac{1}{2}(\nabla\times\boldsymbol{\zeta})\times\boldsymbol{S}-\frac{3}{2}(\boldsymbol{v}\cdot\nabla\varphi)\times\boldsymbol{S}\\&=\left[-\frac{1}{2}(\nabla\times\boldsymbol{\zeta})-\frac{3}{2}(\boldsymbol{v}\cdot\nabla\varphi)\right]\times\boldsymbol{S}\end{aligned} \tag{4.6.18}$$

准确到$(v^3/r)\boldsymbol{S}$，基于方程(4.6.14)，上式又可写成

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{S}'}{\mathrm{d}t}&=\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{S}\\&=\boldsymbol{\Omega}\times\left[(1+\varphi)\boldsymbol{S}-\frac{1}{2}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{S})\right]\\&=\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{S}'\end{aligned} \tag{4.6.19}$$

其中

$$\boldsymbol{\Omega}=-\frac{1}{2}(\nabla\times\boldsymbol{\zeta})-\frac{3}{2}(\boldsymbol{v}\times\nabla\varphi) \tag{4.6.20}$$

方程(4.6.19)表明,自旋矢量 $\boldsymbol{S}'$ 以速度 $|\boldsymbol{\Omega}|$ 绕 $\boldsymbol{\Omega}$ 的方向按逆时针方向进动,而 $\boldsymbol{S}'$ 的模 S' 保持不变。$\boldsymbol{S}'$ 可表示成

$$\boldsymbol{S}' = S'\boldsymbol{n}' \tag{4.6.21}$$

其中 $\boldsymbol{n}'$ 表示 $\boldsymbol{S}'$ 的单位方向矢量。

将方程(4.6.21)代入方程(4.6.19),得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{n}'}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{n}' \tag{4.6.22}$$

根据方程(4.6.14),准确到$(v^3/r)S$,可以将 $\boldsymbol{S}$ 用 $\boldsymbol{S}'$ 表示出来

$$\boldsymbol{S} = (1-\varphi)\boldsymbol{S}' + \frac{1}{2}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{S}') \tag{4.6.23}$$

将方程(4.6.21)代入方程(4.6.23),得

$$\boldsymbol{S} = S'\left[(1-\varphi)\boldsymbol{n}' + \frac{1}{2}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}')\right] \tag{4.6.24}$$

其中 $\boldsymbol{n}'$ 由方程(4.6.22)给出。

方程(4.6.24)给出了陀螺自旋 $\boldsymbol{S}$ 的表达式,由此可以看出,$\boldsymbol{S}$ 的进动方式很特别,一方面以 $S'(1-\varphi)\Omega$ 绕 $\boldsymbol{\Omega}$ 方向做逆时针进动(Ω 是 $\boldsymbol{\Omega}$ 的模),另一方面还要受到几个附加矢量的"拖曳"作用。

我们选一个参考系,其原点在轨道陀螺上,参考系相对遥远星系定向(即通过接收遥远星系的光信号定向)。由此选定的参考系称之为陀螺共动恒星定向准惯性参考系,简称共动准惯性系。显然,共动准惯性系与地心准惯性系之间没有旋转,只有平移,参见图 4.6.1。因此,就考察陀螺的进动效应而言,不论是在共动准惯性系中考察,还是在地心准惯性系中考察,结果是相同的。这就是说,即使在共动准惯性系中考察,方程(4.6.19) ~ (4.6.24)也是正确的。于是,可以在陀螺准惯性系中安装某种光电装置,通过监测陀螺自旋 $\boldsymbol{S}$ 的方向余弦(即相对 PX,PY,PZ 方向夹角)来确定 $\boldsymbol{S}$ 的进动效应,进而根据方程(4.6.19) ~ (4.6.24)反算引力场 φ 及 $\boldsymbol{\zeta}$。按照这种思想,从原理上可以探测地球外部引力场的精细结构。但实际精度究竟能达到多高,还有待进一步研究。

反过来,如果我们知道了场 φ 和 $\boldsymbol{\zeta}$,则可预测陀螺的进动效应,这在精密导航科学中有重要意义。在地球动力学中的一个应用就是能预言地球自转轴的相对论进动效应,我们曾在 3.5.7 节中讨论过这

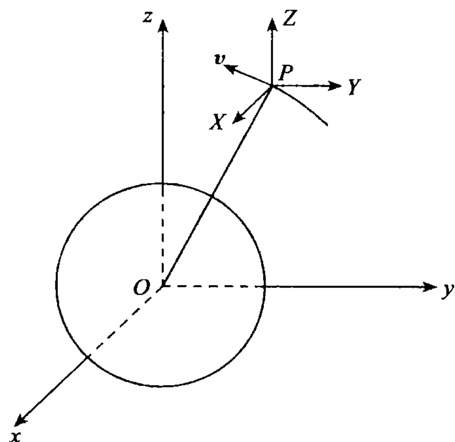


图 4.6.1　地心准惯性系与陀螺准惯性系的转换

一效应,那里给出的精度已经足够了。

这里需要指出,如果我们选取与陀螺固结的局部参考系,那么,该参考系将构成局部惯性系,简称陀螺固结惯性系。在陀螺固结惯性系中考察,陀螺没有进动效应。这时,需要建立陀螺固结惯性系与地心准惯性系之间的联系方程,这超出了本书的范围。

下面考察一下自旋矢量 $\boldsymbol{S}$ 的进动角频率 $\boldsymbol{\Omega}$ 的计算问题。作为一级近似,我们假定地球是均质圆球,这时

$$\varphi = -\frac{GM}{r} \tag{4.6.25}$$

$$\boldsymbol{\zeta} = -\frac{2G}{r^3}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{J}) \tag{4.6.26}$$

其中,$\boldsymbol{J}$ 是地球的自转角动量,由方程(4.2.31)给出。

将方程(4.6.25)和方程(4.6.26)代入方程(4.6.20),得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Omega} &= \frac{1}{2}\nabla\times\left[\frac{2G}{r^3}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{J})\right]-\frac{3}{2}\left[\boldsymbol{v}\times\nabla\left(-\frac{GM}{r}\right)\right]\\ &= -G\left[\frac{1}{r^3}\nabla\times(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{J})+\nabla\left(\frac{1}{r^3}\right)\times(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{J})\right]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{3}{2}GM\boldsymbol{v}\times\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\\
&=-G\left[-\frac{2\boldsymbol{J}}{r^3}-\frac{3}{r^5}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{J})\boldsymbol{r}+\frac{3}{r^3}\boldsymbol{J}\right]+\frac{3}{2}GM\frac{\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}}{r^3}\\
&=\frac{3G}{r^5}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{J})\boldsymbol{r}-\frac{G}{r^3}\boldsymbol{J}+\frac{3}{2}GM\frac{\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}}{r^3} \qquad (4.6.27)
\end{aligned}
$$

在上述推演中，假定了 $\boldsymbol{J}$ 与空间坐标无关，但有可能随时间演化。在方程(4.6.27)的最后一个等号的右边，最后一项是测地进动项，类似于电磁学中的Thomas进动，因而也常称之为引力Thomas效应；前两项称为Lense-Thirring进动，归功于Lense and Thirring(1918)，表示地球角动量、陀螺自旋以及轨道角动量之间的相互耦合作用，可与原子物理学中导致原子核的精细结构现象的耦合作用类比（原子核角动量、电子自旋以及轨道角动量之间的相互耦合作用）。

4.7 重力梯度测量

4.7.1 基本原理(牛顿框架)

重力梯度测量的目的是精化地球引力场，所采用的方法就是测量地球引力位的二阶导数。为此目的而设计的仪器称之为重力梯度仪。下面我们把讨论限定在空间中的重力梯度测量，并且，为了简单起见，我们只讨论运载体处于“自由落体”状态时的情形。比如，将重力梯度仪放置在卫星(运载体)上就属于这一情形。

当运载体处于“自由落体”状态时，引力与惯性力相互抵消了。此时如果试图用重力仪(加速度计)测定引力，那将是徒劳的。因为重力仪测定的是空间一点的重力(或引力)值，而在这一点，引力与惯性力是不可区分的。重力梯度仪则不同，它测定的是空间两点之间的重力(引力)之差，而一般情况下，这个差值(当然可以测定很多这种差值)提供了引力场信息。比如，如果这个差值始终为零，那么，引力场必为均匀的，或者不存在引力场；如果这个差值不为零，则表示引力场是非均匀的，可以通过尽可能多的重力梯度观测值来解算

引力场。一般说来，用这种解算方法将留有一个积分常数需要用其他方法确定。比如，任意一个非均匀引力场总可以假想再叠加一个均匀引力场，而这个均匀引力场部分无法用重力梯度测量来确定。但均匀引力场在空间各点都相同，可以任意选定几个点用绝对重力仪测定。因此，前述的不确定性常数不会给重力梯度测量带来本质性的影响。另外，从大尺度范围来看，整个宇宙物质不可能产生均匀引力场，如若不然，整个宇宙（就平均水平而言）就会向某个方向作加速运动，这是不可能的。

下面我们考察一个简例，说明重力梯度测量原理。

假定有两个等质量物质球 A 和 B（以后称 A 和 B 为检验质量）在地球引力场中作自由落体运动，参见图 4.7.1。如果把地球看做均质圆球，那么，地球引力场具有球对称分布。在图 4.7.1(a) 中，两个检验质量 A 和 B 在自由下落过程中将逐渐相互靠近。在图 4.7.1(b) 中，如果假定两个检验质量最初具有相同的初始速度，那么，由于 B 相比于 A 总是受到更大的引力作用，因此，A 和 B 之间的距离将随着自由下落过程的延续而越来越大。不论是上述情形的哪一种，A 和 B 之间的距离总有变化。通过测定这种距离的变化，有可能求出引力场。

让我们以图 4.7.1(a) 为例来论证。选取直角坐标系 $O-xyz$ 如图 4.7.2 所示，其中原点 O 在地球质心，并且使得 A 和 B 位于 $O-yz$ 平面之内，而且 Oz 轴平分 A 和 B 的连线。由图 4.7.2 可以看出，A 和 B 之间（沿连线方向）的相对加速度 a_{AB} 可表示成如下形式：

$$\begin{aligned} a_{AB} &= g_B \sin(180° + \theta) - g_A \sin(180° - \theta) \\ &= -\frac{2GM}{r^2}\sin\theta \end{aligned} \tag{4.7.1}$$

其中，r 是地心至 A 或 B 的距离，$180° - \theta$ 和 $180° + \theta$ 分别是重力加速度 $\boldsymbol{g}_A$ 和 $\boldsymbol{g}_B$ 与 z 轴正向之间的夹角。又设 l 是 A 与 B 之间的距离，则有

$$\sin\theta = \frac{l/2}{r} = \frac{l}{2r} \tag{4.7.2}$$

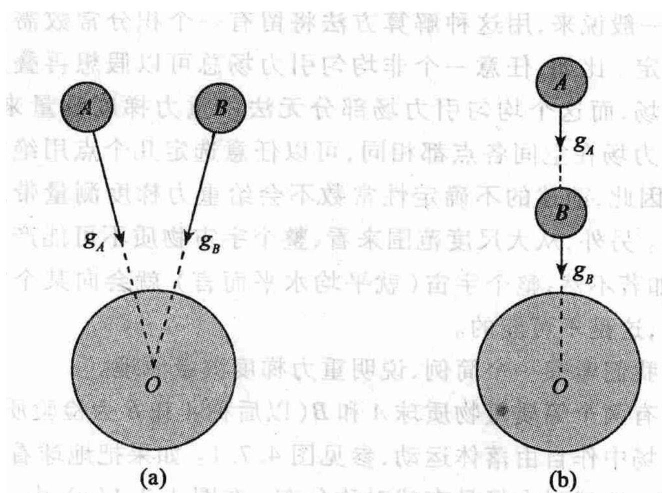


图 4.7.1　重力梯度测量示意图(A 和 B 是检测质量,在引力场中作自由落体运动)

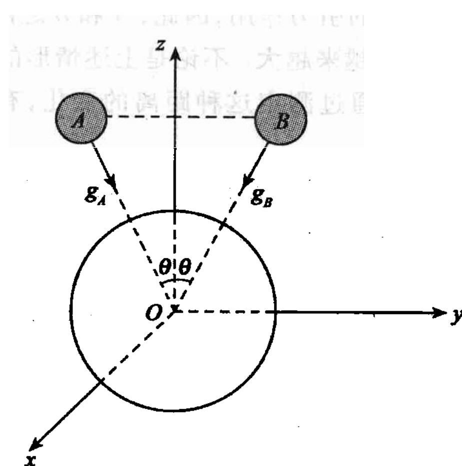


图 4.7.2　A 和 B 是检测质量,g_A 和 g_B 分别是 A 和 B 在引力场作用下所获得的加速度

因此,方程(4.7.1)可改写成

$$a_{AB} = -\frac{GMl}{r^3} \qquad (4.7.3)$$

由方程(4.7.3)，如果将 A 和 B 用刚性杆连接，那么，这个刚性杆将受到压缩力 ma_{AB}，其中 m 是检验质量。于是，方程(4.7.3) 可写成

$$ma_{AB} = -\frac{GMml}{r^3} \qquad (4.7.4)$$

上式的左边正好是重力梯度仪测定的量；在右边，m，l 均为已知量，因而可以求出 GM/r^3。如果知道了 M，则可求这 r，从而求出 A 和 B 处的引力 GM/r^2。如果知道了 r，可求出 M，从而也可求出引力 GM/r^2。但一般情况下，我们并不知道 M 和 r。注意到方程(4.7.4)，就其物理意义可写成

$$ma_{AB} = \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{GM}{r}\right)\bigg|_{y=0} ml = \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\bigg|_{y=0} ml \qquad (4.7.5)$$

或写成

$$ma_{AB} = +V_{yy}lm \qquad (4.7.6)$$

其中，用 V_{yy} 表示 $\partial^2 V/\partial y^2$，它是引力位在 y 方向的二阶偏导数。由方程(4.7.6) 得

$$V_{yy} = \frac{ma_{AB}}{ml} \qquad (4.7.7)$$

重力梯度仪测定的是 ma_{AB}，从而由方程(4.7.7) 得知，通过(处于“自由落体”状态的) 重力梯度测量可得到 V_{yy}。

由上述分析又可看出，仅就测定 V_{yy} 而言，重力梯度仪是处于自由落体状态还是静止状态是无关紧要的。同理，如果将 A 和 B 分别放在 $O-xy$ 面(相对 Oy 轴对称) 和 $O-zx$ 面(相对 Ox 轴对称) 时，则可测定出 V_{xx} 和 V_{zz}。

一般地，由于引力 $\boldsymbol{g}$ 有三个分量 g_i，可用引力位表示成

$$g_i = \frac{\partial V}{\partial x^i} = \partial_i V \equiv V_i \qquad (4.7.8)$$

其中，$x^1 = x$，$x^2 = y$，$x^3 = z$。

现在不管 A、B 球的放置方向如何(见图 4.7.3)，只要它们做自由落体运动，则可按如下方式建立起它们之间的联系

$$V_i(A) = V_i(O) + V_{ij}(O)dx^j(O,A)$$
$$V_i(B) = V_i(O) + V_{ij}(O)dx^j(O,B) \qquad (4.7.9)$$

其中，O 是 A 与 B 连线的中点，$dx^j(O,N)(N = A,B)$ 表示 O 至 N 的距离(j 分量)。由上边两式得

$$\begin{aligned} \mathrm{d}V_i(A,B) &\equiv V_i(B) - V_i(A) \\ &= V_{ij}(O)[\mathrm{d}x^j(O,B) - \mathrm{d}x^j(O,A)] \\ &= V_{ij}(O)\mathrm{d}x^j(A,B) \end{aligned} \qquad (4.7.10)$$

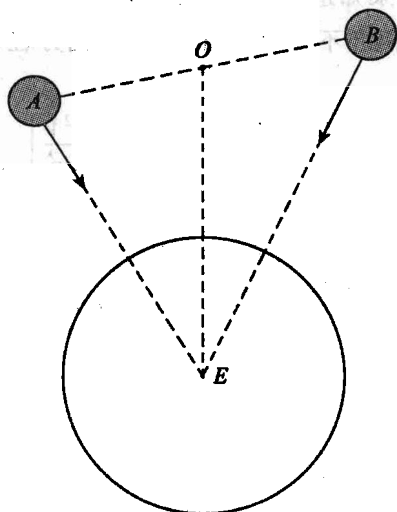


图 4.7.3　O 是检测质量 A 与 B 连线的中点

其中，$\mathrm{d}x^j(A,B)$ 是 A 与 B 之间的距离的 j 分量，$\mathrm{d}V_i(A,B)$ 实际上就是 A 与 B 之间的相对加速度 ma_i(i 分量)。

如果 A 与 B 是完全自由的，即没有任何东西将它们连接，则可将方程(4.7.10)写成

$$\frac{\mathrm{d}V_i(A,B)}{\mathrm{d}t} = V_{ij}(O)\frac{dx^j(A,B)}{\mathrm{d}t} \qquad (4.7.11)$$

这个方程表明，如果测定了 t 时刻 A 与 B 之间的相对速度以及 A 与 B 之间的相对加速度的变化率，则可求出 $V_{ij}(O)$。如果 A 与 B 之间用刚

性杆连接，则 $dx^j(A,B)$ 是已知的。这时，通过加速度计可测出 $dV_i(A,B)$，由此也可确定出 $V_{ij}(O)$。重力梯度仪正是基于方程(4.7.10)来实现的。

欲进一步了解重力梯度测量原理，可参阅 Savet(1968)，Rummel and Colombo(1985)，Colombo(1990)，Jekeli(1992)，Koop(1993)，罗志才(1996)。

4.7.2　引力与惯性力的分离问题

早在 1967 年，Moritz 就提出并阐述了动态大地测量。然而，只是到 20 世纪 80 年代初，动态大地测量（主要包括惯性大地测量和动态重力测量）才开始活跃(Schwarz，1980；Colombo，1990；Rummel and Colombo，1985；Schwarz and Wei，1990)。动态大地测量最主要的特点是速度快、效率高。以我国为例，在边远地区、海域以及山区，严重缺乏重力数据。如何解决"在既节省人力又能在较短时间内获得这些区域的重力数据"的问题具有不可忽视的重要意义。

在动态重力测量中（载体是卫星、飞机、汽车或舰船），测量仪器（或元件）不仅感受到引力，同时还感受到非引力作用，或称之为惯性力。这两种力总是交织在一起。如何将它们有效地分离是目前国内外研究的一个热点。Jekeli(1992)曾经为了"证实"加速计在一般情况下并不感应引力而讨论了加速计、重力仪以及重力梯度仪对引力以及惯性力的响应，声称，"加速计只感应由真实力引起的加速效应，这里的真实力是指引力的反作用力以及惯性力"。实际上，Jekeli(1992)并没有证实什么，相反，只能说明，在一般情况下，加速计感应到的是引力与惯性力的和。设想加速计自由降落，它感应到零结果是因为它所感应的引力与惯性力正好抵消了。因此，动态大地测量（动态重力测量和惯性测量）中的核心问题是"引力与惯性力的分离"，它被著名大地测量学家 H. Moritz 列为 21 世纪大地测量领域的七大研究方向之一（董绪荣等，1998）。无论是在惯性导航、航空重力测量领域，还是在卫星重力测量领域，它们均离不开引力与惯性力的分离。Shen(1996)曾研究了载体（比如卫星）处于"自由落体"运动状态下的引力与惯性力的内部分离问题。然而，在受迫运动情

形(特别是当载体是飞机、汽车或舰船时),情况要复杂得多。

以地心恒星参考系(此为准惯性系)为例,载体的加速度可表示成 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g}$,其中 $\boldsymbol{a}$ 是载体的加速度,$\boldsymbol{g}$ 是引力加速度,$\boldsymbol{f}$ 是(受迫)惯性加速度(称为比力或非保守力)。在惯性导航(INS)测量中,$\boldsymbol{g}$ 作为已知量,由地球重力场模型给出,实际上常常用正常引力代替,$\boldsymbol{f}$ 由加速度仪测出,而陀螺仪则完成定向任务(即确定载体的姿态)。于是,经过一次积分和二次积分,分别给出速度信息和位置信息,但精度不是很高。若将全球定位系统(GPS)与 INS 组合起来,则可提供精度较高的速度和位置信息。在此组合系统中,由于 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{f}$ 均可由此系统实测出来(前者由 GPS,后者由 INS),$\boldsymbol{g}$ 便可被当做未知量求解(董绪荣,1994;董绪荣等,1998)。然而,在一般运动状态下,加速计测出的 $\boldsymbol{f}$ 并非总是非保守力,它往往还包含有引力成分,这一点尚未引起学术界的足够重视,甚至有误导(Jekeli,1992)。如果不能有效地将它们所包含的引力成分分离出来,将直接影响到动态重力测量的精度。国内外有不少学者已经或正在研究动态重力测量问题,而且航空重力测量已处于实验及应用阶段。然而,从目前国内外的发展情况来看,动态重力测量不论从理论上还是在实际应用方面基本上还处于起步阶段,特别是当载体是飞机、汽车或舰船的情形,因还有待深入研究和探讨。

广义相对论的一个著名论断是,就一个局部封闭系统而言,若不借助于外部观测手段,就无法在系统内部判定该系统是处于静止状态还是运动状态(Einstein,1915a,b;Weinberg,1972)。其根据是,引力场可用加速场来代替,或者说,引力可用惯性力来代替。在自由降落的载体中,尽管我们感受不到力,但我们处于运动之中;若载体静止在地面,尽管我们感受到了(重)力,但我们处于静止状态。因此,在动态大地测量中,首要任务是如何将引力与惯性力有效地分离。

引力与惯性力的分离涉及两个核心问题,一个是内部分离问题,一个是外部分离问题。前者涉及广义相对论本身,因为按此理论,引力与惯性力是无法区分的,因而不可分离(但若考察一点的邻域,研究该邻域中的黎曼张量,则可将引力与惯性力分离开来);后者则主要根据外部观测量并结合有关模型来分离引力与惯性力。

Shen and Moritz(1996a,b,1997)曾研究了航空重力梯度测量中的引力与惯性力的内部分离问题,其结论是,在载体中采用惯性平台(定向陀螺仪)以及重力梯度仪即可提取出引力信息(无须借助外部观测量),其条件是引力场是球形场或有心场(比如地球引力场)。如果考虑一种理想的均匀引力场,那么,仅仅采用内部观测法就不可能将引力信号提取出来。均匀引力场可以完全由惯性力场来等效。另一方面,若考察在均匀引力场中自由降落的载体的内部,其重力梯度仪必然感受到零结果。一个简例是让载体静止,这时,在载体中的任何一点,引力场强都是一样的,重力梯度为零(不考虑离心力)。但在一般有心引力场中情形则不同,过任意邻近的两点的力线均指向某一有限距离处的点(比如指向地球中心或太阳中心),因而所述两条力线有相互靠近或远离的趋势。这种两条力线之间相互靠近或远离的趋势,可由重力梯度仪"感应"出来。

尽管用重力梯度仪可以提取引力信息,但是否能提取出所有引力信息呢?很显然,若在有心引力场之上叠加一个均匀引力场,那么,重力梯度仪就提取不出均匀引力场信息。考虑相当遥远的恒星在运动载体所在处产生的引力场,这时无法用重力梯度仪提取出由该恒星产生的引力场信息,因为该引力场在载体附近几乎是均匀的。这就意味着,从理论上来说,我们不能保证仅用内部观测手段就可以完整地提取出引力场信息,至少,对于均匀引力场是无法实现的(这里需要指出,重力梯度观测的零结果或者对应于均匀引力场,或者对应于不存在引力场的空间)。但就探测地球引力场而言,目前在太阳系范围,太阳、月球和其它行星的引力(引潮力)均可精确计算加以顾及(潮汐改正),太阳系外天体引力影响被认为可以忽略,因此,实用上利用重力梯度仪可以将引力与惯性力分离开(Shen,1996)。

由于现代空间技术(特别是 GPS 技术)的发展,我们可以精确地确定在空间(或地面)运动的载体的动态位置,精度可达到厘米级(陈俊勇,2002)。这就是说,可根据外部观测量确定载体的加速度。如果没有非引力影响,只存在引力作用,那么,载体所在位置 P 处的加速度正好体现了该处的引力场强度。然而,一般情形下,运动载体除了受引力场制约以外,还受到其他非引力因素的影响。就卫星而

言，它将受到诸如大气阻尼、光压、电离层作用等因素的影响。这些非引力（或称阻尼力）作用将使卫星产生附加加速度，后者可由固定在运动载体内部的加速计测定出来。这时，外部观测量确定的加速度是引力加速度与附加加速度的和。例如，考虑在均匀引力场中作自由降落的载体。如果没有非引力影响，外部观测加速度就是引力加速度。如果有空气阻尼，外部观测加速度将小于引力加速度，其减小的部分，正好可由固定在载体内部的加速计测定出来。加速计测定的零结果表明，载体处于没有非引力影响的引力场之中，此时载体的运动状态是真正的“自由落体”，外部观测加速度的大小正好反映了引力场的大小。

运动载体是卫星的情形相对比较简单。但当运动载体是飞机、汽车或舰船时，情况要复杂得多，Shen（1996）对此进行了较为深入的探讨。

按照等效原理，引力质量与惯性质量等效。因此，如果把讨论局限于点质量，那么，引力与惯性力将是不可区分的。但如果考虑一个有限区域，则可将它们区分开来。我们曾经（参见3.3.5节）指出，引力场本身固有的特性，决定了引力场空间结构。惯性力则不同，它与参考系的选取有关。引力场空间结构的内禀特征可用黎曼曲率张量 $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ 来描述。当 $R_{\mu\nu\alpha\beta}\neq 0$ 时，空间是弯曲的，表明有引力存在。当 $R_{\mu\nu\alpha\beta}=0$ 时，空间是平坦的，表明没有引力存在，或只存在均匀引力场。

我们知道，选用不同的参考系，会引进不同的惯性力。但如果我们计算出 $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ 就会发现，$R_{\mu\nu\alpha\beta}$ 与参考系的选取无关，因而也就与任何惯性力无关。仅仅凭借这一点，就可以将引力与惯性力区分开来。论证 $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ 与惯性力无关是容易的，因为 $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ 是张量，它在坐标系变换之下保持不变，而惯性力在坐标系变换之下是可以改变的。

在 3.2.9 节我们曾经给出了测地线偏离方程

$$a^{\mu}=-R_{\lambda\alpha\sigma}{}^{\mu}T^{\lambda}X^{\alpha}T^{\sigma} \tag{4.7.12}$$

其中，X^{α}、a^{μ} 分别是两条测地线之间的分离矢量以及分离（或接近）加速度，T^{λ} 是测地线的切矢量。对于测地线，取时间参数，则有

$$T^{\lambda} = \frac{\mathrm{d}x^{\lambda}}{\mathrm{d}t} \equiv \dot{x}^{\lambda} \tag{4.7.13}$$

将方程(4.7.13)代入方程(4.7.12),得

$$a^{\mu} = -R_{\lambda\alpha\sigma}{}^{\mu}\dot{x}^{\lambda}\dot{x}^{\sigma}X^{\alpha} \tag{4.7.14}$$

将方程(4.7.14)与方程(4.7.10)进行比较就会发现,二者具有完全类似的结构。唯一的区别是,方程(4.7.10)是三维的(牛顿框架),方程(4.7.14)是四维的(广义相对论框架)。因此,如何将方程(4.7.14)转化成三维的可观测的模型是问题的关键。

4.7.3 相对论重力梯度测量原理

测地线偏离方程(4.7.14)又可以写成

$$a_{\mu} = -R_{\lambda\alpha\sigma\mu}\dot{x}^{\lambda}\dot{x}^{\sigma}X^{\alpha} \tag{4.7.15}$$

根据上述方程即可求解地球外部重力场,其详细讨论参见(Shen,1996)。另外,X^{α} 是已知的,其中 $X^0 \equiv 0$。于是,方程(4.7.15)可改写成

$$\begin{aligned} a_i &= -R_{\lambda j\sigma i}\dot{x}^{\lambda}\dot{x}^{\sigma}X^j \\ &= -R_{0j0i}\dot{x}^0\dot{x}^0X^j - R_{kj0i}\dot{x}^k\dot{x}^0X^j \\ &\quad -R_{0jli}\dot{x}^0\dot{x}^lX^j - R_{kjli}\dot{x}^k\dot{x}^lX^j \end{aligned} \tag{4.7.16}$$

其中,由于 $x^0 \equiv t$,因此 $\dot{x}^0 = 1$。

如果选取随梯度仪共动的参考系,则有 $\dot{x}^i = 0$。因此,方程(4.7.16)变为

$$a_i = -R_{0j0i}X^j \tag{4.7.17}$$

从另一方面来看,在地心准惯性系中考察,一般情况下 $\dot{x}^i$ 不为零。但 $\dot{x}^i$ 远小于光速,即 $\dot{x}^i \ll 1$(光速单位制),因此,方程(4.7.17)近似成立。基于这一理由,我们认为方程(4.7.17)在一般参考系中也成立。

如果将方程(4.7.17)与牛顿框架中的重力梯度测量模型(4.7.10)进行比较就会发现,二者是完全类似的,只要将方程(4.7.10)中的 V_{ij} 用 $-R_{0j0i}$(注意 $R_{0j0i} \equiv R_{0i0j}$)替换即可。下面我们在后牛顿近似场中计算 R_{0j0i},以便与模型(4.7.10)进行比较。

$R_{\mu\nu\alpha}{}^{\beta}$ 与仿射联络$\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}$ 之间由下式联系(参见 3.2.8 节)

$$R_{\mu\nu\alpha}{}^{\beta} = \frac{\partial \Gamma^{\beta}{}_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial \Gamma^{\beta}{}_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu}} + \Gamma^{\sigma}{}_{\mu\alpha}\Gamma^{\beta}{}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\sigma}{}_{\nu\alpha}\Gamma^{\beta}{}_{\mu\sigma} \tag{4.7.18}$$

我们感兴趣的是 $R_{0j0}{}^{i}$,因此,由方程(4.7.18)得

$$-R_{0j0}{}^{i} = \frac{\partial \Gamma^{i}{}_{j0}}{\partial x^{0}} - \frac{\partial \Gamma^{i}{}_{00}}{\partial x^{j}} + \Gamma^{\sigma}{}_{j0}\Gamma^{i}{}_{0\sigma} - \Gamma^{\sigma}{}_{00}\Gamma^{i}{}_{j\sigma} \tag{4.7.19}$$

将方程(4.7.11)代入上式,准确到量级 v^4/r,注意到

$$\frac{1}{\partial x^{0}} \sim v/r,\ \frac{1}{\partial x^{i}} \sim 1/r \tag{4.7.20}$$

得

$$\begin{aligned}
-R_{0j0}{}^{i} &= \frac{\partial \overset{3}{\Gamma}{}^{i}{}_{j0}}{\partial t} - \frac{\partial \overset{2}{\Gamma}{}^{i}{}_{00}}{\partial x^{j}} - \frac{\partial \overset{4}{\Gamma}{}^{i}{}_{00}}{\partial x^{j}} \\
&\quad + (\Gamma^{0}{}_{j0}\Gamma^{i}{}_{00} + \Gamma^{k}{}_{j0}\Gamma^{i}{}_{0k} - \Gamma^{0}{}_{00}\Gamma^{i}{}_{j0} - \Gamma^{k}{}_{00}\Gamma^{i}{}_{jk})^{\leq 4} \\
&= \frac{\partial \overset{3}{\Gamma}{}^{i}{}_{j0}}{\partial t} - \frac{\partial \overset{2}{\Gamma}{}^{i}{}_{00}}{\partial x^{j}} - \frac{\partial \overset{4}{\Gamma}{}^{i}{}_{00}}{\partial x^{j}} + \overset{2}{\Gamma}{}^{0}{}_{j0}\overset{2}{\Gamma}{}^{i}{}_{00} - \overset{2}{\Gamma}{}^{k}{}_{00}\overset{2}{\Gamma}{}^{i}{}_{jk}
\end{aligned} \tag{4.7.21}$$

再将$\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}$ 的诸表达式(3.6.12)代入方程(4.7.21),得(下降 i 指标)

$$\begin{aligned}
-R_{0j0i} &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \overset{3}{g}_{i0}}{\partial x^{j}} + \frac{\partial \overset{2}{g}_{ij}}{\partial t} - \frac{\partial \overset{3}{g}_{j0}}{\partial x^{i}}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^{2}\overset{2}{g}_{00}}{\partial x^{i}\partial x^{j}} \\
&\quad - \frac{\partial}{\partial x^{j}}\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial \overset{4}{g}_{00}}{\partial x^{i}} + \frac{\partial \overset{3}{g}_{i0}}{\partial t} + \frac{1}{2}\overset{2}{g}_{ik}\frac{\partial \overset{2}{g}_{00}}{\partial x^{k}}\right) \\
&\quad + \left(-\frac{1}{2}\frac{\partial \overset{2}{g}_{00}}{\partial x^{j}}\right)\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial \overset{2}{g}_{00}}{\partial x^{i}}\right) - \left(-\frac{1}{2}\frac{\partial \overset{2}{g}_{00}}{\partial x_{k}}\right) \\
&\quad \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \overset{2}{g}_{ij}}{\partial x^{k}} + \frac{\partial \overset{2}{g}_{ik}}{\partial x^{j}} - \frac{\partial \overset{2}{g}_{jk}}{\partial x^{i}}\right)
\end{aligned} \tag{4.7.22}$$

后面将证明(见方程(4.7.32)),在准确到 v^4/r 的情况下,$R_{0j0i} = R_{0j0}{}^{i}$。这就是说,将 $R_{0j0}{}^{i}$ 的 i 指标下降或将 R_{0j0i} 的 i 指标提升不会带来影响,因此,后面我们将视方便采用 $R_{0j0}{}^{i}$ 或 R_{0j0i}。

将 $g_{\mu\nu}$ 的表达式(3.6.69)代入方程(4.7.22),得

$$
\begin{aligned}
-R_{0j0i} = & \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \zeta_i}{\partial x^j} - 2\delta_{ij}\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\partial \zeta_j}{\partial x^i}\right) \\
& - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}(-2\varphi^2 - 2\psi) \\
& - \frac{\partial^2 \zeta_i}{\partial x^j \partial t} - \frac{1}{2}\left(-2\delta_{ik}\frac{\partial \varphi}{\partial x^j}\right)\left(-2\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\right) \\
& - \frac{1}{2}(-2\delta_{ik}\varphi)\left(-2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^j \partial x_k}\right) \\
& + \frac{1}{4}\left(-2\frac{\partial \varphi}{\partial x^j}\right)\left(-2\frac{\partial \varphi}{\partial x^i}\right) \\
& + \frac{1}{4}\left(-2\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\right)\left(-2\delta_{ij}\frac{\partial \varphi}{\partial x^k} - 2\delta_{ik}\frac{\partial \varphi}{\partial x^j} + 2\delta_{jk}\frac{\partial \varphi}{\partial x^i}\right)
\end{aligned}
\tag{4.7.23}
$$

无须再往下运算，可以看出，这个关系式极为复杂，即使通过重力梯度仪测得了诸分量 $R_{0j0}{}^i$，也难以解出 φ，ψ，ζ_i 等量。但我们可以寻求简化模型，以便与方程(4.7.10)进行比较。

假定场是稳恒态的，即假定地球自转角速度均匀，这时，ζ^i 与时间无关。因此，方程(4.7.23)中凡是含有 $\partial\zeta_i/\partial t$ 的项均为零。再进一步假定场 φ 随时间变化很小(若是均质圆球，则 φ 不随时间变化)，则可略去所有含 $\partial\varphi/\partial t$ 的项。于是，方程(4.7.23)可以写成

$$
\begin{aligned}
-R_{0j0}{}^i &= -\varphi_{ij} - 2\varphi_i\varphi_j - 2\varphi\varphi_{ij} - \psi_{ij} \\
&\quad - 2\varphi_j\varphi_i - 2\varphi\varphi_{ij} + \varphi_j\varphi_i + \delta_{ij}\varphi^k\varphi_k + \varphi_i\varphi_j - \varphi_j\varphi_i \\
&= -\varphi_{ij} - 4\varphi\varphi_{ij} - 3\varphi_i\varphi_j - \psi_{ij} + \delta_{ij}\varphi^k\varphi_k
\end{aligned}
\tag{4.7.24}
$$

或

$$
R_{0j0}{}^i = R_{0j0i} = \varphi_{ij} + 4\varphi\varphi_{ij} + 3\varphi_i\varphi_j + \psi_{ij} - \delta_{ij}\varphi^k\varphi_k \tag{4.7.25}
$$

其中

$$
\varphi_i \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}, \quad \varphi_{ij} \equiv \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^j} \tag{4.7.26}
$$

$$
\psi_{ij} \equiv \frac{\partial \psi}{\partial x^i \partial x^j}, \quad \varphi^k\varphi_k \equiv \varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 \tag{4.7.27}
$$

方程(4.7.25)给出了 $R_{0j0}{}^{i}$ 与场 φ 以及 ψ 之间的关系。根据3.6.3节的讨论,对于稳恒态场,可以略去 ψ,这时,含于 ψ 中的关于 $\overset{2}{T}_{00}$ 的积分被吸收到了 φ 之中(参见3.6.3节)。于是,方程(4.7.25)可以写成

$$R_{0j0i} = \varphi_{ij} + 4\varphi\varphi_{ij} + 3\varphi_{i}\varphi_{j} - \delta_{ij}\varphi^{k}\varphi_{k} \qquad (4.7.28)$$

由于

$$R_{0\mu0\nu} = g_{\nu\alpha}R_{0\mu0}{}^{\alpha} \qquad (4.7.29)$$

因此

$$R_{0j0i} = g_{i\alpha}R_{0j0}{}^{\alpha} = g_{i0}R_{0j0}{}^{0} + g_{ik}R_{0j0}{}^{k} \qquad (4.7.30)$$

由方程(4.7.18),得

$$\begin{aligned} R_{0j0}{}^{0} &= \frac{\partial\, \Gamma^{0}{}_{j0}}{\partial x^{0}} - \frac{\partial\, \Gamma^{0}{}_{00}}{\partial x^{j}} + \Gamma^{\sigma}{}_{j0}\,\Gamma^{0}{}_{0\sigma} - \Gamma^{\sigma}{}_{00}\,\Gamma^{0}{}_{j\sigma} \\ &= 0 - \frac{\partial\, \overset{3}{\Gamma}{}^{0}{}_{00}}{\partial x^{j}} + \Gamma^{0}{}_{j0}\,\Gamma^{0}{}_{00} + \Gamma^{i}{}_{j0}\,\Gamma^{0}{}_{0i} - \Gamma^{0}{}_{00}\,\Gamma^{0}{}_{j0} - \Gamma^{i}{}_{00}\,\Gamma^{0}{}_{ji} \\ &= -\frac{\partial\, \overset{3}{\Gamma}{}^{0}{}_{00}}{\partial x^{j}} \end{aligned} \qquad (4.7.31)$$

在导出上式的过程中,用到了 $\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}$ 的表达式(3.6.11),并准确至 v^4/r。将 $g_{\mu\nu}$ 的表达式(3.6.6)以及(4.7.31)代入方程(4.7.30),得(准确到 v^4/r)

$$R_{0j0i} = \delta_{ik}R_{0j0}{}^{k} = R_{0j0}{}^{i} \qquad (4.7.32)$$

将方程(4.7.28)代入方程(4.7.17),得

$$\begin{aligned} a_{i} &= -R_{0j0i}X^{j} \\ &= -(\varphi_{ij} + 4\varphi\varphi_{ij} + 3\varphi_{i}\varphi_{j} - \delta_{ij}\varphi^{k}\varphi_{k})X^{j} \end{aligned} \qquad (4.7.33)$$

方程(4.7.33)是准确到 v^4/r^2 量级时的重力梯度模型,其中 φ 是第一牛顿引力位。与方程(4.7.10)比较可知,二者极为类似,但在这里多了几项。由于 φ 具有量级 v^2, φ_{ij} 具有量级 v^2/r^2,因此,如果准确到 v^2/r^2,则回到了模型(4.7.10)(牛顿框架)。这里需要说明,方程(4.7.33)并不是准确到量级 v^4/r^2 时的最普遍的模型,普遍的模型应采用方程(4.7.23)和方程(4.7.17)。确切地说,将 R_{0j0i} 的表达式(4.7.23)代入方程(4.7.17),即得普遍模型。这时,对重力梯度仪的贡

献除牛顿引力位 φ 之外，还有第二牛顿引力位 ψ 以及矢量位 ζ。

下面我们考虑一下由高于 v^2/r^2 阶次的项对重力梯度观测量的影响有多大。为此，我们只需要考虑模型(4.7.33)就足够了。由于 $\varphi_i\varphi_j$ 与 $\varphi\varphi_{ij}$ 具有相同的数量级，因此，只需要估算

$$\Delta = 4\varphi\varphi_{ij} \equiv 4\varphi\varphi^{ij} \tag{4.7.34}$$

即可。就误差估计而言，可以将地球视为均质圆球，故有

$$\varphi = -\frac{GM}{r} \tag{4.7.35a}$$

$$\varphi^i = \frac{GM}{r^3}x^i \tag{4.7.35b}$$

$$\varphi^{ij} = \delta^{ij}\frac{GM}{r^3} - \frac{3GM}{r^3}x^i x^j \tag{4.7.35c}$$

因此

$$\Delta = 4\varphi\varphi^{ij} = \left(-4\frac{GM}{r}\right)\left(\delta^{ij}\frac{GM}{r^3} - \frac{3GM}{r^5}x^i x^j\right) \sim \frac{4GM}{r^3}\frac{GM}{r} \tag{4.7.36}$$

GM/r 具有量级 $\frac{2}{3}\times 10^{-9}$（由于采用了光速单位制，因而 GM/r 无量纲），而 GM/r^3 正好是重力梯度典型观测值，其量级为 1.5×10^{-6}，具有量纲 s^{-2} 或 cm^2。通常，人们习惯于 Eötvös 单位，记为 EU(Eötvös Unit)，规定为

$$1\text{EU} = 10^{-9}\text{s}^{-2} = 10^{-9}\text{cm}^2(\text{光速单位}) \tag{4.7.37}$$

因此，重力梯度典型观测值的量级为

$$\frac{GM}{r^3} \sim 1500\text{EU} \tag{4.7.38}$$

这就是说，在相对论框架下的重力梯度观测量值与牛顿框架中的重力梯度观测值有一个量级为 δ 的偏差，根据前面的讨论，这个偏差的量级为

$$\delta \sim 4\times 10^{-6}\text{EU} \tag{4.7.39}$$

从目前的重力梯度观测精度水平(Rummel and Colombo, 1985; Soffel et al., 1988; Koop, 1993)以及将于2008年秋季实施的GOCE重力梯度计划(European Space Agency, 1999; 胡明城, 2003; Bouman et

al., 2004) 来看,只能达到 $10^{-3} \sim 10^{-4}$EU。因此,就目前的重力梯度测量精度水平,无须考虑相对论影响。不过,随着科学技术的发展、观测仪器的改进以及对高精度地球重力场(包括大地水准面)的需求,在不远的将来可能有必要在广义相对论框架之下研究重力梯度测量问题。

附录 A 基本常数

A.1 物理常数

表 A.1 基本物理常数[a]

物理量	常用表示符号	数值	单位
真空中光速	c	299 792 458	$m \cdot s^{-1}$
真空中磁导率	μ_0	4π	$10^{-7} N/A^2$
真空介电常量	$\varepsilon_0 = (\mu_0 c^2)^{-1}$	$8.854\ 187\ 817 \cdots \times 10^{-12}$	$F \cdot m^{-1}$
引力常数	G	$(6.674\ 28 \pm 0.000\ 67) \times 10^{-11}$	$m^3 \cdot s^{-2} \cdot kg^{-1}$
普朗克常量	h	$(6.626\ 068\ 96 \pm 0.000\ 000\ 33) \times 10^{-34}$	$J \cdot s$
约化普朗克常量	$\hbar$	$(1.054\ 571\ 628 \pm 0.000\ 000\ 053) \times 10^{-34}$	$J \cdot s$

续表

物理量	常用表示符号	数　　值	单　　位
基本电荷	e	$(1.602\ 176\ 487 \pm 0.000\ 000\ 040) \times 10^{-19}$	C
磁通量子	$\Phi_0 = h/(2e_0)$	$(2.067\ 833\ 667 \pm 0.000\ 000\ 052) \times 10^{-15}$	Wb
电导量子	$G_0 = 2e^2/h$	$(7.748\ 091\ 7004 \pm 0.000\ 000\ 0053) \times 10^{-5}$	/
电子质量	m_e	$(9.109\ 382\ 15 \pm 0.000\ 000\ 45) \times 10^{-31}$	kg
质子质量	m_p	$(1.672\ 621\ 637 \pm 0.000\ 000\ 083) \times 10^{-27}$	kg
中子质量	m_n	$(1.674\ 927\ 211 \pm 0.000\ 000\ 084) \times 10^{-27}$	kg
质子-电子质量比	m_p/m_e	$1836.152\ 672\ 47 \pm 0.000\ 000\ 80$	/
精细结构常量	$\alpha = e_0^2/(4\pi\varepsilon_0 hc)$	$(7.297\ 352\ 5376 \pm 0.000\ 000\ 0050) \times 10^{-3}$	/
精细结构常量倒数	α^{-1}	$137.035\ 999\ 679 \pm 0.000\ 000\ 094$	/
里德伯常量	$R_\infty = m_e c a^2/(2h)$	$10\ 973\ 731.568\ 527 \pm 0.000\ 073$	m^{-1}
阿伏加德罗常量	N_A	$(6.022\ 141\ 79 \pm 0.000\ 000\ 30) \times 10^{23}$	mol^{-1}
法拉第常量	$F = N_A e_0$	$96\ 485.3399 \pm 0.0024$	$C \cdot mol^{-1}$
摩尔气体常量	R	$8.314\ 472 \pm 0.000\ 015$	$J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}$
玻耳兹曼常量	$k = R/N_A$	$(1.380\ 6504 \pm 0.000\ 0024) \times 10^{-23}$	$J \cdot K^{-1}$

续表

物理量	常用表示符号	数值	单位
斯特藩-玻耳兹曼常量	$\sigma = \pi^2 k^4/(60\hbar^3 c^2)$	$(5.670\ 400 \pm 0.000\ 040) \times 10^{-8}$	$W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}$
电子伏	eV	$(1.602\ 176\ 487 \pm 0.000\ 000\ 040) \times 10^{-19}$	C
原子质量单位	$u = \frac{1}{12}m(^{12}C)$	$(1.660\ 538\ 782 \pm 0.000\ 000\ 083) \times 10^{-27}$	kg
电子荷质比	e/m_e	$-(1.758\ 820\ 150 \pm 0.000\ 000\ 044) \times 10^{11}$	$C \cdot kg^{-1}$
电子半径	$r_e = h\alpha/(m_e c)$	$(2.817\ 940\ 2894 \pm 0.000\ 000\ 0058) \times 10^{-15}$	m
电子康普顿波长	$\lambda_C = h/(m_e c)$	$(2.426\ 310\ 2175 \pm 0.000\ 000\ 0033) \times 10^{-12}$	m
玻尔半径	$a_0 = r_e \alpha^{-2}$	$(0.529\ 177\ 208\ 59 \pm 0.000\ 000\ 000\ 36) \times 10^{-10}$	m
玻尔磁子	$\mu_B = e_0\hbar/(2)m_e$	$(927.400\ 915 \pm 0.000\ 023) \times 10^{-26}$	$J \cdot T^{-1}$
电子磁矩	μ_e	$(-928.476\ 377 \pm 0.000\ 023) \times 10^{-26}$	$J \cdot T^{-1}$
核磁子	$\mu_N = e_0\hbar/(2m_p)$	$(5.050\ 783\ 24 \pm 0.000\ 000\ 13) \times 10^{-27}$	$J \cdot T^{-1}$
质子磁矩	μ_p	$(1.410\ 606\ 662 \pm 0.000\ 000\ 037) \times 10^{-26}$	$J \cdot T^{-1}$
旋磁比	γ_p	$(2.675\ 153\ 62 \pm 0.000\ 000\ 073) \times 10^{8}$	$J \cdot T^{-1}$
量子霍尔阻抗	R_H	$25\ 812.807\ 557 \pm 0.000\ 018$	Ω
维恩常量	$b = \lambda_{max} T$	$(2.897\ 7685 \pm 0.000\ 0051) \times 10^{-3}$	$m \cdot K$

a 国际科技数据委员会(CODATA)2006年正式发表的推荐值

A.2 大地测量常数

表 A.2 常用大地测量常数[a]

物理量	常用表示符号	数值	单位
地心引力常数	GM	$(398\ 600\ 441.8 \pm 0.8) \times 10^6$(包含大气质量) $398\ 600\ 441.5 \times 10^6$(EGM 96 模型) $(398\ 600\ 441.5 \pm 0.8) \times 10^6$(地球时) $398\ 600\ 435.6 \times 10^6$(质心力学时)	$m^3 \cdot s^{-2}$
平均自转角速度	ω	$7\ 292\ 115 \times 10^{-11}$	$rad \cdot s^{-1}$
自转角速率的长期变化	$d\omega/dt$	$(-4.5 \pm 0.1) \times 10^{-22}$	$rad \cdot s^{-2}$
大地水准面上重力位	W_0	$62\ 636\ 855.611 \pm 0.5$	$m^2 \cdot s^{-2}$
重力位尺度因子	$R_0 = \frac{GM}{W_0}$	$6\ 363\ 672.58 \pm 0.05$	m
平均赤道半径	a	$6\ 378\ 136.62 \pm 0.10$(零频潮系统) $6\ 378\ 136.72 \pm 0.10$(平均潮系统) $6\ 378\ 136.59 \pm 0.10$(无潮系统) $6\ 378\ 136.3$(EGM 96 模型)	m

续表

物理量	常用表示符号	数　　值	单　　位
离心力位系数	$q=\frac{\omega^2 a^3}{GM}$	$(3\ 461\ 391\pm 2)\times 10^{-9}$	/
扁率	f	298.256 42 ±0.000 01(零频潮系统) 298.252 31 ±0.000 01(平均潮系统) 298.257 65 ±0.000 01(无潮系统)	/
动力学扁率	$H=\frac{C-\frac{1}{2}(A+B)}{C}$	$(3\ 273\ 763\pm 20)\times 10^{-9}$	/
二阶球谐函数系数(动力学形状因子)	J_2	$(1\ 082\ 635.9\pm 0.1)\times 10^{-9}$	/
J_2 的长期变化	dJ_2/dt	$-(2.6\pm 0.3)\times 10^{-9}$	cy^{-1}
地球主惯性矩	A,B,C	$A=(8.010\ 1\pm 0.000\ 2)\times 10^{37}$ $B=(8.010\ 3\pm 0.000\ 2)\times 10^{37}$ $C=(8.036\ 5\pm 0.000\ 2)\times 10^{37}$ $\alpha=\frac{C-B}{A}=(327\ 353\pm 6)\times 10^{-8}$ $\beta=\frac{C-A}{B}=(329\ 549\pm 6)\times 10^{-8}$ $\gamma=\frac{B-A}{C}=(2\ 196\pm 6)\times 10^{-8}$	$kg\cdot m^2$

续表

物理量	常用表示符号	数　值	单　位
赤道处平均重力	g_e	$(978\ 032.78 \pm 0.2) \times 10^{-5}$	$m \cdot s^{-2}$
黄赤交角	ε_0	23°26′21.4″	/
月球引力常数	GM_L	$4\ 902.799 \times 10^{9}$	$m^3 \cdot s^{-2}$
太阳引力常数	GM_S	$13\ 271\ 244.0 \times 10^{13}$	$m^3 \cdot s^{-2}$
地月距离	$\Delta_{\oplus L}$	384 400	km
日地距离	$\Delta_{\oplus S}$	$1\ AU = 1.495\ 978\ 7 \times 10^{11}$	m
月球轨道偏心率	e_L	0.05490	/
白赤交角	i_L	5°0.9′	/
公转轨道偏心率	E_S	0.01671	/
地球质量[b]	M	5.974×10^{27}	g
平均密度[c]	ρ	5.515×10^{3}	$kg \cdot m^{-3}$
平均极半径[c]	c	6.357×10^{6}	m
体积[c]	V	1.083×10^{21}	m^3
等体积球的半径[d]	r	$6.370\ 8 \times 10^{6}$	m
表面积[d]	S	5.100×10^{14}	m^2

a 虚线以上常数引自(Groten,2004)

b 引自(苏宜,2002)

c 引自(Karato,2003)

d 引自(史谓,2002)

参考文献

Adelberger E G, Stubbs C W, Heckel B R, Su Y, Swanson H E, Smith G, Gundlach J H, Rogers W F. Testing the equivalence principle in the field of the Earth: Particle physics at masses below 1 μeV? *Phys. Rev.* D, 42(i0):3267-3292, 1990.

Airy G B. On a supposed alteration in the amount of astronomical aberration of light, produced by the passage of the light through a considerable thickness of refracting medium. *Proc. Roy. Soc.*, 20: 35-39, 1871.

Alley C O. Relativity and clocks. In: Proc. 33rd Ann. Symp. Freq. Contr. Electronic Industries Assoc, Washington D C, 1977.

Aristotele 著,张竹明译. 物理学. 北京:商务印书馆,1982.

Armstrong M A. 基础拓扑学. 北京:北京大学出版社,1983.

Ashby N. Relativistic effects in the global positioning system. In: Proc. IAG Symposia, Vancouver, Canada, page 41, 1987.

Ashby N. Testing relativity with a laser-cooled cesium clock in space. In: IEEE International Frequency Control Symposium, pages 320-328, 1998.

Ayres D S, Cormack A M, Greenberg A J, Kenney R W, Caldwell D O, Elings V B, Hesse W P, Morrison R J. Measurements of the lifetimes of positive and negative pions. *Phys. Rev.* D, (3): 1051-1063, 1971.

Beams J W. Finding a better value for G. *Physics Today*, No. 5, 1971.

Bergmann P G. *Introduction to the Theory of Relativity*. Springer, Berlin, New York, 1958. (有中译本).

Bertotti B, Brill D, Krotkov R. Experiments on gravitation. In: Gravitation: An Introduction to Current Research. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1962.

Bjerhammar A. On a relativistic geodesy. *Bull. Geod.*, 59: 207-220, 1985.

Bjerhammar A. Relativistic geodesy. Technical Report NON118 NGS36, NOAA Technical Rep., 1986.

Blackett D W. *Elementary Topology*. Acad. Press, New York, 1967.

Blaser J P. Can the equivalence principle be tested with freely orbiting masses? *Class. Quantum Grav.*, 18: 2509-2514, 2001.

玻尔 N. 波粒二象性．收入：物理学诺贝尔演讲集 Ⅱ，北京：科学出版社，1983.

Bolyai J. Appendix. Scientiam spatii absolute veram exhibens: a veritate aut falsitate Axiomatis XI Euclidei (a priori haud unquam decidenda) independentem. in: Bolyai F. *Tentamen juventutem studiosam in elementa matheseos purae. elementaris ac sublimioris, methodo intuitiva, evidentiaque huic propria, introducendi. Cum appendice triplici. Maros Vsrhelyini* [*Neumarkt*]. Joseph and Simeon Kali at the Reform College Press, 1832. (J. Bolyai 的发现收录在他父亲 F. Bolyai 著作的附录中)

Born M. *Einstein's Theory of Relativity*. Methuen, London, 1924. (有中译本).

Boucher C. Current intercomparisons between conventional terrestrial systems. In: Kovalevsky, et al. (eds), Reference Frames. Kluwer

Acad. Pub. ,page 327, 1989.

Bouman J, Tscherning C C, Visser P. Calibration of GOCE SGG data using high-low SST, terrestrial gravity data and global gravity field models. *J. Geod.* ,2004. doi:10.1007/s00190-004-0382-5.

Bradley J,Halley E,Sarton G. Discovery of the aberration of light. *Isis*, 16(2):233-265,1931.

Braginsky V B,Panov V I. Verification of the equivalence of inertial and gravitational mass. *Sov. Phys. JETP*,34:463-466,1972.

Brault J W. *In Misner C W,Thorne K S,Wheeler J A. Gravitation.* W. H. Freeman,New York,1973.

Brumberg V A. Relativistic theory of celestial reference frames. In: Kovalevsky,et al. (eds),Reference Frames. Kluwer Acad. Pub. , page 115, 1989.

Brumberg V A,Groten E. On determination of height by using terrestial clocks and GPS signals. *J. Geod.* ,76:49-54,2002.

Bullen K E. *The Earth's Density*. Chapman and Hall,London,1974.

Burrowes H C,Caldwell D O,Frisch D H,Hill D A,Ritson D M,Schluter R A. K-meson-nucleon total cross sections from 0. 6 to 2. 0 Bev. *Phys. Rev. Lett.* ,2:117-119,1959.

曹昌祺. 电动力学. 北京:人民教育出版社,1961.

Cavendish. Experiments to determine the density of the Earth. *Phil. Trans. Roy. Soc.* ,88:469-526,1798.

Champion F C. Electron-electron elastic scattering. *Proc. Roy. Soc.* , A136:630,1932.

Chao D B,Shen W B,Jin B R. On relativistic effects in the motion of the Earth's rotation axis. In: IAG General Meeting. Beijing, China, 1993.

Champeney D C, Moon P B. Absence of Doppler shift for gamma ray source and detector on same circular orbit. *Proc. Phys. Soc.* 77: 350,1961.

陈国新. 地学基本手册. 北京:测绘出版社,1984.

陈健，晁定波. 椭球大地测量学. 北京：测绘出版社，1989.

陈俊勇. 关于建立中国现代基准的思考. 武汉大学学报（信息科学版），27:441-444，2002.

陈省身，陈维桓. 微分几何讲义. 北京：北京大学出版社，1983.

Cheng M, Tapley B D. Variations in the Earth's oblateness during the past 28 years. *J. Geophys. Res.*, 109(B09402), 2004. doi: 10.1029/2004JB003028.

Ciufolini I, Pavlis E C. A confirmation of the general relativistic prediction of the Lense-Thirring effect. Nature, 431:958-960, 2004.

Ciufolini I, Pavlis E C, Peron R. Determination of frame-dragging using Earth gravity models from CHAMP and GRACE. New Astron., 11: 527-550, 2006.

Cockcraft J D, Walton G T S. Experiment with high velocity positive ions. II: The disintergration of elements by high velocity protons. *Proc. Roy. Soc.*, A137:229-242, 1932.

Colombo O L. The role of GPS/INS in mapping the Earth's gravity field in 1990's. In: IAG Int. Symp. on Kinematic Systems in Geodesy, Survying, and Remote Sensing. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1990.

Cranshaw T E, Schiffer J P, Whitehead A B. Measurement of the gravitational red shift using the Mössbauer effect in Fe^{57}. *Phys. Rev. Lett.*, 4(4):163-164, 1960.

Dabbs J, Harvey J A, Paya D, Horstmann H. Gravitational acceleration of free neutrons. *Phys. Rev.*, B139:756-760, 1965.

De Sitter W. Ein astronomischer Beweis für die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit. *Physik Zeitschr.*, 14:429, 1913a.

De Sitter W. Über die Enauigkeit, innerhalb welcher die Unabhängigkeit der Lichtgeschwindigkeit von der Bewegung der Quelle behaupter werden kan. *Physik Zeitschr.*, 14:1267, 1913b.

De Sitter W. On Einstein's theory of gravitation and its astronomical consequences. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 77:155-184, 1916.

Dick G J, Strayer D M. Development of the superconducting cavity maser as a stable frequency source. In: Proc. 38th Annual Freq. Contr. Symp. Philadelphia, 1984.

Diddams S A, Jones D J, Ye J. Direct link between microwave and optical frequencies with a 300 THz femtosecond laser comb. *Phys. Rev. Lett.*, 84:5102-5105, 2000a.

Diddams S A, Udem T, Bergquist J C. An optical clock based on a single trapped $^{199}Hg^{+}$ ion. *Phys. Rev. Lett.*, 84:5102-5105, 2000b.

董绪荣. SINS 与 GPS 组合系统的理论设计及其在动态大地测量中的应用研究. 博士论文. 武汉:武汉测绘科技大学, 1994.

董绪荣, 张守信, 华仲春. GPS/INS 组合导航定位及其应用. 长沙:国防科技大学出版社, 1998.

Durbin R P, Loar H H, Havens W W. The lifetimes of the π^{+} and π^{-} mesons. *Phys. Rev.*, 88:179-183, 1952.

Dziewonski A M, Anderson D L. Preliminary reference Earth model. *Phys. Earth Planet. Int*, 25:297-356, 1981.

Einstein A. Zur elektrodynamik bewegter Körper. *Ann. Phys.*, 17:891-921, 1905.

Einstein A. Zum Ehrenfestschen Paradoxon. *Phys. Z eitschr*, 12:509, 1911.

Einstein A. Zur allgemeinen Relativitatstheorie. *Preuss Akad Wiss Berlin Sitzber*, 5:778-786, 1915a.

Einstein A. Zur allgemeinen Relativitatstheorie(2nd part). *Preuss Akad Wiss Berlin Sitzber*, 5:799-801, 1915b.

爱因斯坦. 爱因斯坦文集 I. 北京:商务印书馆, 1976.

Einstein A, Infeld L. The gravitational equations and the problem of motion II. *Ann. Math.*, *2nd Ser.*, 41:455-464, 1940.

Einstein A, Infeld L, Hoffmann B. The gravitational equations and the problem of motion. *Ann. Math.*, *2nd Ser.*, 39:65-100, 1938.

European Space Agency. Gravity field and steady-state ocean circulation missions. Technical Report Mission Selection: The Four Candidate

Earth Explorer Core Missions, SP-1233 (1), European Space Agency, Noordwijk, 1999.

方俊. 重力测量与地球形状学 I. 北京:科学出版社,1961.

方俊. 重力测量与地球形状学 II. 北京:科学出版社,1975.

Farago P S, Janossy L. Experimental evidence for the law of variation of the electron mass with velocity. *Nuovo Cimento*, 5: 1411-1436, 1957.

Farley F J, Bailey J M, Picasso E. Is the special theory right or wrong? Experimental verifications of the theory of relativity. *Nature*, 217: 17-18, 1968.

冯瑮. 利用 GPS 卫星信号测量重力位差的精度分析. 学士论文. 武汉:武汉大学,2007.

Ferraro R, Sforza D M. Arago (1810): the first experimental result against the ether. *European Journal of Physics*, 26 (1): 195-204, 2005.

Feynman R P, Leighton R B, Sands M. *The Feynman Lectures on Physics*. Addison-Wesley, 1963.

菲赫金哥尔茨 R M. 微积分学教程(第 3 卷第 2 分册). 北京:人民教育出版社,1959.

Finkelstein A M, Kreinovich V J, Pandey S N. Relativistic reductions for radiointerferometric observables. *Astrophys. Space Sci.*, 94(2): 233-247, 1983.

Frisch D H, Smith J H. Mearsurement of the relativistic time dilation using μ-mesons. *Am. J. Phys.*, 31: 342-355, 1963.

Fizeau H. Sur les hypothèses relatives à l'éther lumineux. *Comptes Rendus*, 33: 349 - 355, 1851.

Fukushima T. Time systems in general relativity. In: Kovalevsky, et al. (eds), Reference Frames. Kluwer Acad. Pub., page 417, 1989.

Galileo G. *Dialogues Concerning Two New Sciences (trans from Le Opere di Galileo Galilei)*. Edizione Nazionale, Florence, 1898. (中译本:关于两个新世界体系的对话).

Gauss C F. *Werke, Vierter Band*. Koniglichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Gottingen, 1880.（高斯在1824年写给Taurinus的信中说自己发现了非欧几何，该信收录在上述高斯全集的第187页）

Gorbatenko M V, Gorbatenko T M. Kerr solution consistent motion of spin particles in the general relativity. *AarXiv*:*gr-qc*/0606087,1:1-15,2006.

Grafarend E W. From kinematical geodesy to inertial positioning. In: Schwarz K P(ed),Proc. Sec. Intern. Symp. on Inertial Technology for Surveying and Geodesy. Banff,Canada,1985.

Greenberg A J,Ayres D S,Cormack A M,Kenney R W,Caldwell D O, Elings V B,Hesse W P,Morrison R J. Charged-pion lifetime and a limit on a fundamental length. *Phys. Rev. Lett.*,23:1267-1270, 1969.

Greenstein J L,Oke J B,Shipman H L. Effective temperature,radius, and gravitational redshift of Sirius B. *Astrophysical Journal*,169: 563-566,1971.

Groten E. Fundamental parameters and current(2004)best estimates of the parameters of common relevance to astronomy, geodesy, and Geodynamics. *J. Geod.*,77(10):724-732,2004.

管泽霖，宁津生. 地球形状及其外部重力场Ⅰ,Ⅱ. 北京：测绘出版社,1981.

郭硕鸿. 电动力学. 北京：人民教育出版社,1979.

GWR homepage. http://www.gwrinstruments.com/gwr_tidalbro.html. 2007.

Hafele J C, Keating R E. Around-the-world atomic clocks: Predicted relativistic time gains. *Science*,177:166-168,1972a.

Hafele J C, Keating R E. Around-the-world atomic clocks: Observed relativistic time gains. *Science*,177:168-170,1972b.

韩春好. 相对论框架中的地球参考系和天球参考系. 博士论文. 南京：南京大学,1990.

Harkins M D. Relativistic effects in satellite dynamics and Doppler tracking. NWL Technical Report TR-2965, Naval Weapons Laboratory, 1973.

Hausdorff F. *Grundzüge der Mengenlehre*. Veit and Company, Leipzig, 1914.

Hawking S. *A Brief History of Time*. Bantam Books, New York, 1990. (有中译本).

Hay H J, Schiffer J P, Cranshaw T E, Egelstaff P A. Measurement of the red shift in an accelerated system using the Mössbauer effect in Fe^{57}. *Phys. Rev. Lett.*, 4(4): 165-166, 1960.

Heavner T P, Jefferts S R, Donley E A, Shirley J H, Parker T E. NIST-F1: recent improvements and accuracy evaluations. *Metrologia*, 42(5): 411-422, 2005a.

Heavner T P, Jefferts S R, Donley E A, Shirley J H, Parker T E. Recent improvements in NIST-F1 and a resulting accuracy of $\delta f / f = 0.61 \times 10^{-15}$. IEEE Transactions on *Instrumentation and Measurement*, 54(2): 842-845, 2005b.

Heiskanen W A, Moritz H. *Physical Geodesy*. Freeman and Company, San Francisco, 1967.

Herring T A, Mathews P M, Buffett B A. Modeling of nutation-precession: Very long baseline interferometry results. *J. Geophys. Res.*, 107: 2069-2080, 2002.

Heyl P R, Chrzanowski P. A new redetermination of the constant of gravitation. *J. Res. Nat. Bur. Stand. (US)*, 29: 1-31, 1942.

侯伯元,侯伯宇. 物理学家用微分几何(第 2 版). 北京:科学出版社, 2004.

胡明城. 现代大地测量学的理论及其应用. 北京:测绘出版社, 2003.

胡明城,鲁福. 现代大地测量学 Ⅰ, Ⅱ. 北京:测绘出版社, 1993.

Hudson M C, Johnson W H. Atomic masses of Fe^{56} and Fe^{57}. *Phys. Rev.*, 167(4): 1064-1066, 1968.

IGS Bureau. 2001-2002 Annual Report. Technical Report, IGS Central

Bureau,2004.

Infeld L, Schild A. On the motion of test particles in general relativity. *Rev. Mod. Phys.*,21:408-413,1949.

Ives H E, Stilwell G R. An experimental study of the rate of a moving atomic clock I. *J. Opt. Soc. Am.*,28:215-226,1938.

Ives H E, Stilwell G R. An experimental study of the rate of a moving atomic clock II. *J. Opt. Soc. Am.*,31:369-374,1941.

Jaffe J. Feasibility of a second-order gravitational red-shift experiment. *Phys. Rev.*,14:3294-3300,1976.

Jeffreys H. *The Earth: Its Origin, History, and Physical Constitution* (4th *ed*). Cambridge University Press, Cambridge, 1957.

Jeffreys H. *The Earth: Its Origin, History, and Physical Constitution* (6th *ed*). Cambridge University Press, Cambridge, 1970.

Jekeli C. Does a gravimeter sense gravitation? *Manu. Geod.*,17:365-365,1992.

Jenkins R E. A satellite observation of the relativistic Doppler shift. *The Astronomical Journal*,74:960,1969.

金标仁,申文斌. 相对论大地测量. 武汉测绘科技大学学报,19(13):227-231,1994(3).

金标仁,申文斌,晁定波. 地球动力学参考系理论. 武汉:武汉测绘科技大学出版社,1994.

Kant I. Wöchientliche Fragund Anzeigungs-Nachrichten. Weekly Königsberg Journal,1754.

Karato S. *The Dynamics of the Deep Earth.* Cambridge University Press, Cambridge,2003.

Katila T, Riski K. ^{67}Zn Mössbauer spectroscopy. *Hyperfine Interactions*, 13:119 - 148, 1983.

Kaufmann W. Die magnetische und elektrische Ablenkbarkeit der Becquerelstrahlen und die scheinbare Masse der Elektronen. *Königliche Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-Physikalische Klasse. Nachrichten*,2:143-155,1901.

Kellogg O D. *Foundation of Potential Theory*. Frederick Ungar Publishing Company, New York, 1929.

Kerr R P. Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics. *Phys. Rev. Lett.*, 11(5): 237-238, 1963.

Kleppner D, Vessot R F C, Ramsey N F. An orbiting clock experiment to determine the gravitational red shift. *Astrophys. Space Sci.*, 6: 13-32, 1970.

Koop R. Global gravity field modelling using satellite gravity gradiometry. *Delft, the Netherlands: Nederlandse Commissie voor Geodesie*, 1993.

Kretschmann E. Über den physikalischen Sinn der Relativitätspostulate, A. Einsteins neue und seine ursprüngliche Relativitätstheorie. *Annalen der Physik*, 358(16): 575-614, 1917.

Krisher T P, Anderson J D, Campbell J K. Test of the gravitational redshift effect at Saturn. *Phys. Rev. Lett.*, 64(12): 1322-1325, 1990.

Krisher T P, Morabito D D, Anderson J D. The Galileo solar redshift experiment. *Phys. Rev. Lett.*, 70(15): 2213-2216, 1993.

Lämmerzahl C, Ciufolini I, Dittus H, Iorio L, Müller H, Peters A, Samain E, Scheithauer S, Schiller S. OPTIS—an Einstein mission for improved tests of special and general relativity. *General Relativity and Gravitation*, 36(10): 2373-2416, 2004.

Lay T, Wallace T C. *Modern Global Seismology*. Academic Press, San Diego, New York, 1995.

Lederman L M, Booth E T, Byfield H, Kessler J. On the lifetime of the negative Pi-meson. *Phys. Rev.*, 83(3): 685-686, 1951.

Lemoine F G, Kenyon S C, Factor J K, Trimmer R G, Pavlis N K, Chinn D S, Cox C M, Klosko S M, Luthcke S B, Torrence M H, Wang Y M, Williamson R G, Palvis E C, Rapp R H, Olson T R. The development of the joint NASA GSFC and the National Imagery and

Mapping Agency (NIMA) Geopotential Model EGM96. Technical Report NASA Technical Paper NASA/TP-1998-206861, Goddard Space Flight Center, Greenbelt, 1998.

Lemoine F G, Smith D E, Kunz L, Smith R, Pavlis E, Pavlis N K, Klosko S M, Chinn D S, Torrence M H, Williamson R G, et al. The development of the NASA GSFC and NIMA joint geopotential model. *Gravity, Geoid and Marine Geodesy*, 117:461-469, 1997.

Lense J, Thirring H. Über den Einfluss der Eigenrotation der Zentralkörper auf die Bewegung der Planeten und Monde nach der Einsteinschen Gravitationstheorie. *Phys. Zeitschr.*, 19: 156-163, 1918.

Lewis G N, Tolman R C. The principle of relativity, and non-newtonian mechanics. *Philosophical Magazine*, 18:510-523, 1909.

李进. 虚拟压缩恢复法的模拟实验检验. 学士论文. 武汉:武汉大学,2005.

李建成,陈俊勇,宁津生,晁定波. 地球重力场逼近理论与中国2000似大地水准面的确定. 武汉:武汉大学出版社,2003.

李天初,李明寿,林平卫,黄秉英等. NIM4#激光冷却铯原子喷泉钟——新一代国家时间频率基准. 计量学报,25: 193-197, 2004a.

李天初,李明寿,林平卫,黄秉英等. NIM4#铯冷原子喷泉钟新一代时间频率基准. 宇航计测技术,24:20-25,2004b.

李宗伟. 天体物理学. 北京:高等教育出版社,2000.

梁灿彬,周彬. 微分几何入门与广义相对论. 北京:科学出版社,2006.

Lobachevski N. O nachalakh geometrii. *Kasanski Vestnik*, Feb. March 1829, pp. 178 ~ 187; April 1829, pp. 228 ~ 241; Nov. ~ Dec 1829, pp. 227 ~ 243; March ~ April 1830, pp. 251 ~ 283; July ~ Aug. 1830, pp. 571 ~ 636. (in Russian) (Lochevski 于1826年提出了自己的新观点,但文章发表于1829年)

Lockerbie N A. A dynamical technique for measuring the gravitational quadrupole coupling of the STEP and MICROSCOPE experimental test masses. *Class. Quantum Grav.* ,17:4195-4206,2000.

Lodge O. Experiments on the absence of mechanical connection between ether and matter. *Phil. Trans. Roy. Soc. A*,189:149-166,1897.

Lorentz H A. *Versuch einer Theorie der electrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern.* Brill,Leiden,1895.

Lorentz H A. Electromagnetic phenomena in a system moving with any velocity less than that of light. *Proc. Roy. Acad. Amsterdam*,6:809,1904.

Lorentz H A, Einstein A, Minkowsky H, Weyl H. *The Principle of Relativity.* Methuen and Company,London,1923.

陆锴书,吴家让. 大地天文学.北京:测绘出版社,1987.

罗志才. 利用卫星重力梯度数据确定地球重力场的理论和方法. 博士论文.武汉:武汉测绘科技大学,1996.

Ma C. Extragalactic reference frames. In: Kovalevsky, et al (eds), Reference Frames. Kluwer Acad. Pub. ,page 43, 1989.

Ma L,Bi Z,Bartels A,Robertsson L,Zucco M,Windeler R S,Wilpers G, Oates C,Hollberg L,Diddams S A. Optical frequency synthesis and comparison with uncertainty at the 10^{-19} level. *Science*,303:1843-1845,2004.

Macek W M,Schneider J R,Salamon R M. Measurement of Fresnel drag with the ring laser. *Journal of Applied Physics*,35:2556,2004.

Mach E. *Die Mechanik in Ihrer Entwicklung.* F A Brockhaus,Leipzig, 1893.

Mach E. *Die Mechanik in Ihrer Entwicklung*(6th ed). F A Brockhaus, Leipzig,1908.

Maxwell J C. A dynamical theory of the electromagnetic field. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 155:459 - 512, 1865.

Magie W F. *A Source Book in Physics.* Princeton University Press,1935.

McCarthy D D, Petit G. IERS Conventions (2003). Technical Report IERS Technical Note No. 32, IERS Conventions Centre, 2004.

Mester J, Torii R, Worden P, Lockerbie N, Vitale S, Everitt C. The STEP mission: principles and baseline design. *Class. Quant. Grav.*, 18 (13): 2475-2486, 2001.

Michelson A A, Morley E W. The motion of the Earth relative to the luminiferous ether. *Amer. J. Sci*, 34(202): 333-345, 1887.

Miller A I. *Albert Einstein's Special Relativity.* W. H. Freeman, New York, 1981.

Minkowsky H. Space and time. *Nachr. d. K. Ges. d. Wiss. zu Gött.*, *Math. Phys. Kl.*, 53, 1908.

Minkowsky H. Space and time. In: Lorentz H A, et al. (eds), The Principle of Relativity, pages 73-91. 1923.

Misner C W, Thorne K S, Wheeler J A. *Gravitation.* W. H. Freeman, New York, 1973.

Mohr P J, Taylor B N, Newell D B. CODATA recommended values of the fundamental physical constants: 2006. Reviews of Modern Physics, 80(2): 633-730, 2008.

Möller C. The *Theory of Relativity.* Clarendon Press, Oxford, 1972.

Moritz H. Kinematical geodesy. Technical Report AFCRL-67-0626, AD666052, Department of Geodetic Science, The Ohio State University, Columbus, Ohio, 1967.

Moritz H. *Kinematical Geodesy.* Bayerische Akademie der Wissenschaften, Beck in Kommission, 1968.

Moritz H. On the convergence of the spherical harmonic series of the geopotential at the Earth surface. *Bollettino di Geodesia e Science Affini*, 37: 363-381, 1978.

Moritz H. Relativistic effects in reference frames (review). In: Reference Coordinate Systems for Earth Dynamics, 1981.

Moritz H. Geodetic reference system 1980. *J. Geod.*, 74(1): 128-162, 2000.

Moritz H. Inertia and gravitation in geodesy. *Inertial Technology for Surveying and Geodesy, Banff, Canada*, 1985.

Moritz H. *The Figure of the Earth.* Wichmann, Karlsruhe, 1993.

Moritz H, Hofmann-Wellenhof B. *Geometry, Relativity, Geodesy.* Wichmann, Karlsruhe, 1993.

Mössbauer R L. Kernresonanzabsorption von Gammastrahlung in Ir^{191}. *Naturwissenschaften*, 45(22): 538-539, 1958a.

Mössbauer R L. Kernresonanzfluoreszenz von Gammastrahlung in Ir^{191}. *Zeitschrift für Physik a Hadrons and Nuclei*, 151 (2): 124-143, 1958b.

Nascimento Ú. On the trail of Fresnel's search for an ether wind. *Apeiron*, 5: 181-192, 1998.

Navarro J F, Frenk C S, White S D M. The structure of cold dark matter halos. *Astrophys. J.*, 462: 563-575, 1996.

Newcomb S. Discussion and results of observations on transits of Mercury from 1677 to 1881. *Astronomical Papers Prepared for the Use of the American Ephemeris and Nautical Almana*, 1: 367 – 487, 1882.

Newton I. *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica.* Streater, London, 1687. In (Motte A ed., Cajori A rev.) Sir Isaac Newton's Mathematical Principles of Natural Philosophy and His System of the World, California University Press, 1962.

牛顿著. 王克迪译, 袁江洋校. 自然哲学之数学原理宇宙体系. 武汉: 武汉大学出版社, 1992.

Nobili A M, Bramanti D, Polacco E, Roxburgh I W, Comandi G, Catastini G. Galileo Galilei' (GG) small-satellite project: an alternative to the torsion balance for testing the equivalence principle on Earth and in space. *Class. Quant. Grav.*, 17(12): 2347-2349, 2000.

Nordtvedt K. Earth's equivalence principle violating multipoles: more science from a robust violation signal in STEP. *Class. Quant. Grav.*, 18: 2467-2473, 2000.

Ohanian H. *Gravitation and Spacetime.* W. W. Norton and Company,

New York, 1976.

Olin A, Alexander T K, Häusser O, McDonald A B, Ewan G T. Measurement of the relativistic Doppler effect using 8.6 MeV capture γ rays. *Phys. Rev. D.*, 8(6): 1633-1639, 1973.

Pauli W. *Theory of Relativity.* Pergamon, New York, 1958.

Pereira F, Marion H, Bize S, Sortais Y, Clairon A, Salomon C. Controlling the cold collision shift in high precision atomic interferometry. *Phys. Rev. Lett.*, 89(23): 233004, 2002.

Planck M. On an improvement of Wien's equation for the spectrum. *Dtsch. Phys. Ges.*, 2: 202-204, 1900.

Planck M. On the energy distribution law in the normal spectrum radiation. *Annalen der Physik*, 4: 553-563, 1901.

彭加勒 J H 著. 李醒民译, 范岱年校. 最后的沉思. 北京: 商务印书馆, 2003.

Popper D M. Red shift in the spectrum of 40 Eridani B. *Astrophys. J.*, 120: 316-321, 1954.

Pound R V, Rebka G A. Gravitational red-shift in nuclear resonance. *Phys. Rev. Lett.*, 3(9): 439-441, 1959.

Pound R V, Rebka G A. Attempts to detect resonance scattering in Zn^{67}; the effect of zero-point vibrations. *Phys. Rev. Lett.*, 4(8): 397-399, 1960a.

Pound R V, Rebka G A. Variation with temperature of the energy of recoil-free gamma rays from solids. *Phys. Rev. Lett.*, 4(6): 274-275, 1960b.

Pound R V, Snider J L. Effect of gravity on gamma radiation. *Phys. Rev.*, 140(3B): B788-B803, 1965.

Pradels G, Touboul P. In-orbit calibration approach of the MICROSCOPE experiment for the test of the equivalence principle at 10^{-15}. *Class. Quant. Grav.*, 20(13): 2677-2688, 2003.

Pugh G E. WSEG Research Memo No. 11. Technical Report, Weapons Systems Evaluation Group, The Pentagon, Washington, DC, 1959.

强元棨. 经典力学Ⅰ,Ⅱ. 北京:科学出版社,2003.

秦荣先,阎永廉. 广义相对论及引力理论实验检验. 上海:上海科技文献出版社,1987.

Raboy S, Trail C C. On the relation between velocity and mass of the electron. *Nuovo Cimento*, 10:797, 1958.

饶扬玉. 引力常数、地球膨胀、地壳运动. 地壳形变与地震,14(1):85-91,1994.

Rapp R. The calculation and accuracy of the global geoid height. *Proc Sixth Intern. Symp. on Satellite Positioning, Columbus, USA*, 1992.

Reigber C, Schwintzer P, Neumayer K H, Barthelmes F, König R, Förste C, Balmino G, Biancale R, Lemoine J M, Loyer S, et al. The CHAMP-only earth gravity field model EIGEN-2. *Adv. Space Res.*, 31(8):1883-1888, 2003.

Robertson H P. Kinematics and world – structure. *Astrophysical Journal*, 82:284 301, 1935.

Robertson H P. Kinematics and world – structure II. *Astrophysical Journal*, 83:187 201, 1936.

Robertson H P. Space age astronomy. Deutch A J, Klemperer W E (eds.), Academic Press, New York, 1962, p. 228. Rogers M M, McReynolds A W, Rogers F T. A determination of the masses and velocities of three radium b beta-particles the relativistic mass of the electron. *Phys. Rev.*, 57(5):379-383, 1940.

Rose R D, Parker H M, Lowry R A, Kuhlthau A R, Beams J W. Determination of the gravitational constant G. *Phys. Rev. Lett.*, 23(12):655-658, 1969.

Rosser W G V. *An Introduction to the Theory of Relativity*. Butterworths, London, 1971. (有中译本)

Rossi B, Hall D B. Variation of the rate of decay of mesotrons with momentum. *Phys. Rev.*, 59(3):223-228, 1941.

Rummel R, Colombo O L. Gravity field determination from satellite gradiometry. *J. Geod.*, 59(3):233-246, 1985.

Safra J E, Aguila-Cauz J, et al. Britannica (15th ed.) 17:570-572, 2005 (London)

Savet P H. Gravity field exploration by a new gradient technique. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 6:710-716, 1968.

Schiff L I. Motion of a gyroscope according to Einstein's theory of gravitation. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 46 (6):871-882, 1960a.

Schiff L I. Possible new experimental test of general relativity theory. *Phys. Rev. Lett.*, 4(5):215-217, 1960b.

Schutz B F. *Geometrical Methods of Mathematical Physics.* Cambridge University Press, 1980. (有中译本).

Schwarz K P. Inertial surveying systems-experience and prognosis. *The Canadian Surveyor*, 34:41-54, 1980.

Schwarz K P, Wei M. A framework for modeling the gravity vector by kinematic measurements. *J. Geod.*, 64:331-336, 1990.

Schwarzschild K. Das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einstein'schen Theorie. *Sitzungsberichte der K niglich Preussischen Akademie der Wissenschaften.* 1:189 196, 1916.

Schwob C, Jozefowski L, de Beauvoir B, Hilico L, Nez F, Julien L, Biraben F, Acef O, Zondy J J, Clairon A. Optical frequency measurement of the 2S-12D transitions in hydrogen and deuterium: Rydberg constant and Lamb shift determinations. *Phys. Rev. Lett.*, 82(25):4960-4963, 1999.

Selleri F. On the Fizeau experiment. *Foundations of Physics Letters*, 16 (1):71-82, 2003.

沈镜祥,施品浩,刘基余,何妙福,钱志瀚等编著. 空间大地测量. 武汉:中国地质大学出版社,1981.

申文斌. 空间与时间探索. 武汉:武汉测绘科技大学出版社,1994.

Shen W B. *On the Separability of Gravitation and Inertia According to General Relativity.* Doctoral Dissertation, Graz Technical University, Graz, Austria, 1996.

申文斌. 引力位虚拟压缩恢复法. 武汉大学学报(信息科学版),29(6):720-724,2004.

Shen W B. The downward continuation of gravity field. AOGS 2nd General Meeting,June 14-18. 2005,Singapore,2005a.

Shen W B. Lecture notes on satellite geodesy. Royal Inst. of Techn. Stockholm,Sweden,2005b.

Shen W B. Measuring the geopotential differences between two points. *Coordinates*,1(7):8-10,2005c.

申文斌. 地球物理力学基础. 武汉：武汉大学印刷讲义,2005.

Shen W B. The downward continuation of gravity field. In: Ip W H, Chen Y T(eds), Advances in Geoscience I: Solid Earth. World Scientific Press,London,Singapore,pp. 142-148,2006.

Shen W B,Chao D,Jin B R. On relativistic geoid. *Bollettino di Geodesia e Science Affini*,52(3):207-216,1993a.

Shen W B,Chao D B,Jin B R. On the geoid and some related tide theory problems. IAG General Meeting. Beijing,China,1993b.

申文斌,晁定波,金标仁. 论时钟在引力场中的运行速率. 天文文献情报,6(1):9-15,1993.

申文斌,晁定波,金标仁. 等频大地水准面的概念及应用. 武汉测绘科技大学学报,19:232-238,1994.

申文斌,冯瑮,王泽民,晁定波. 利用 GPS 信号测定海拔高的多普勒消除技术. 测绘科学,2008a,33(专刊):5-8.

申文斌,韩建成,李进,陈巍. 地球质量的变化. 私人通讯,2008b.

申文斌,李进. 利用地磁卫星观测数据建立外部地球磁场模型的一种方法及模拟实验检验. 中国天文学会 2005 年学术年会. 合肥,2005.

Shen W B,Moritz H. On the separation of gravitation and inertia and the determination of the relativistic gravity field in the case of free motion. *J. Geod.*,70(10):633-644,1996a.

Shen W B,Moritz H. On the separation of gravitation and inertia in airborne gradiometry. *Bollettino di Geodesia e Scienze Affini*,55(2):

145-159,1996b.

Shen W B,Moritz H. The separation of gravitation and inertia in the first-order gradient. In: Segawa,et al. (eds),Gravity,Geoid and Marine Geodesy, Vol. 117, pages 196-203. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg,1997.

Shen W B,Ning J S. The application of GPS technique in determining the Earth's potential field. *Journal of Global Positioning Systems*,4: 268-276,2005.

Shen W B,Ning J S. Separation problem in gradiometry. *Geo-spatial Information Science*,10(1):4-11,2007.

申文斌,宁津生,李建成,晁定波. 论相对论重力位及相对论大地水准面. 武汉大学学报(信息科学版),29:897-900,2004a.

申文斌,宁津生,刘经南,晁定波. 关于运动载体引力与惯性力的分离问题. 武汉大学学报(信息科学版),28:52-54,2003.

申文斌,宁津生,刘经南,晁定波. 关于动态航空重力测量中的理论模型的研究. 测绘空间地理信息,27:1-5,2004b.

Shen W B,Ning J S,Liu J N,Chao D B. A proposal on the test of general relativity by clock transportation experiments. In: 36th COSPAR Scientific Assembly. Bejing, 2006. Adv. Space Res. , 2008 (in press)

申文斌,田伟,宁津生等. 虚拟压缩恢复法在确定位漂移中的应用. 大地测量与地球动力学,26:105-108,2006a.

申文斌,王正涛,晁定波. 用卫星重力数据确定地球外部重力场的一种方法及模拟实验检验. 武汉大学学报(信息科学版),31(3): 190-193,2006b.

申文斌,鄢建国,晁定波. 利重力场的“局部虚拟向下延拓”以及利用EGM96 模型的模拟实验检验. 武汉大学学报(信息科学版),31(7):589-593,2006c.

申文斌,鄢建国,晁定波. 虚拟压缩恢复法在向下延拓问题中的应用. 测绘信息与工程, 31:1-4. 2006d.

申子宇. 弧度测量 1°子午线弧长随纬度变化的规律问题. 测绘科学,

2008,33(专刊):20-22.

史谞. 地球物理学基础. 北京:北京大学出版社,2002.

Smith N M. The energies released in the reactions $Li^7(p,\alpha)He^4$ and $Li^6(d,\alpha)He^4$, and the masses of the light atoms. *Phys. Rev.*,56(6):548-555,1939.

Snider J L. New measurement of the solar gravitational red shift. *Phys. Rev. Lett.*,28(13):853-856,1972.

Soffel M. *Relativity in Astrometry, Celestial Mechanics and Geodesy.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1989.

Soffel M, Herold H, Ruder H, Schneider M. Relativistic theory of gravimetric measurements and definition of the geoid. *Manuscript Geodaetica*,13:143-146,1988.

Soffel M, Klioner S, Müller J, Biskupek L. Gravitomagnetism and lunar laser ranging. Phys. Rev. D,78,024033-(1-8),2008.

Stark J, Hermann W, Kinoshita S. Der Doppler – Effekt im Spektrum des Quecksilbers. *Annalen der Physik*, 326(13):462 469, 1906.

Stein S R. Application of superconductivity to precision oscillators. *Frequency Control, 29th Annual Symposium on.* 1975, pages 321-327,1975.

Stöcker H 著,吴锡真,李祝霞,陈师平译. 物理手册. 北京:北京大学出版社,2004.

Stokes G G. On the aberration of light. *Phil. Mag.*,27(9):9-15,1845.

苏宜. 天文学新概论. 武汉:华中科技大学出版社,2002.

Sullivan D B, Ashby N, A Donley E, Heavner T P, Hollberg L W, Jefferts S R, Klipstein W M, Phillips W D, Seidel D J. PARCS: NASA's laser-cooled atomic clock in space. *Advances in Space Research*,36(1):107-113,2005.

孙和平. 重力场的时间变化与地球动力学. 中国科学院院刊,19(3):189-193,2004.

Synge J L. *Relativity: the General Theory.* North-Holland Pub. Comp., Amsterdam,1960.

Thirring H, Lense J. Über den Einmfluss der Eigenrotation der Zentralkörper auf die Bewegung der Planeten und Monde nach der Einsteinschen Gravitationstheori. *Phys. Z.* ,19:156-163,1918.

Torge W. *Gravimetry.* Walfer de Cruyter,Berlin and New York 1989.

Touboul P,Rodrigues M,Metris G,Tatry B. MICROSCOPE,testing the equivalence principle in space. *Comptes Rendus de l'Academic des Sciences Series IV Physics*,2(9):1271-1286,2001.

Trenkel C, Speake C C. Direct measurement of STEP test mass quadrupole moments. *Class. Quantum Grav.* 20(24):5343-5351, 2003.

Turneaure J P,Will C M,Farrell B F,Mattison E M,Vessot R F C. Test of the principle of equivalence by a null gravitational red-shift experiment. *Phys. Rev. D.* ,27(8):1705-1714,1983.

Udem T,Holzwarth R,Hänsch W. Optical frequency motrology. *Nature*, 416:233-237,2002.

Udem T,Huber A,Gross B,Reichert J,Prevedelli M,Weitz M,Hänsch T W. Phase-coherent measurement of the hydrogen 1S-2S transition frequency with an optical frequency interval divider chain. *Phys. Rev. Lett.* ,79(14):2646-2649,1997.

Varićak V. Zum Ehrenfestschen Paradoxon. *Physik Zeitschrift*,12:169, 1911.

Vessot R F C,Levine M W. A test of the equivalence principle using a space-borne clock. *Gen. Relat. Gravit.* ,10:181-204,1979.

Vessot R F C,Levine M W,Mattison E M,Blomberg E L,Hoffman T E, Nystrom G U,Farrel B F,Decher R,Eby P B,Baugher C R,Watts J W,Teuber D L,Wills F D. Test of relativistic gravitation with a space-borne hydrogen maser. *Phys. Rev. Lett.* ,45(26):2081-2084,1980.

Wald R M. *General Relativity.* University of Chicago Press,Chicago, London,1984.

王连祥,方德植,张鸣镛等. 数学手册. 北京:人民教育出版社,1979

王义遒. 建设我国独立自主时间频率系统的思考. 宇航计测技术,24(1):1-10,2005.

王正明. 守时工作进展. 天文学进展,22:104-114,2004.

王正行. 近代物理学. 北京:北京大学出版社,1995.

Weinberg S. *Gravitation and Cosmology*. Wiley,New York,1972.

Weyl H. *Raum, Zeit, Materie: Vorlesungen über allgemeine Relativitätstheorie* (6th ed). Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York,1970.

Will C M. *Theory and Experiment in Gravitational Physics*. Cambridge University Press,Cambridge,1981.

Witteborn F C, Fairbank W M. Experimental comparison of the gravitational force on freely falling electrons and metallic electrons. *Phys. Rev. Lett.*,19(18):1049-1052,1967.

Worden P, Mester J, Torii R. STEP error model development. *Class. Quantum Grav.* 18(13):2543-2550,2001.

熊全淹. 近世代数. 武汉:武汉大学出版社,1984.

Xu S,Crossley D,Szeto A M K. Variations in length of day and inner core differential rotation from gravitational coupling. *Phys. Earth Planet. Inter.*,117:95-110,2000.

Yan H J, Groten E. Equations of motion and orbit perturbations of a neutral particle in a quasi-isotropic Kerr metric. *General Relativity and Gravitation*,24(7):719-727,1992.

杨福家,王炎森,陆福全. 原子核物理(第 2 版). 上海:复旦大学出版社,2002.

Ye J,Yoon T H,Hall J L,A Madej A,Bernard J E,Siemsen K J,Marmet L,Chartier J M,Chartier A. Accuracy comparison of absolute optical frequency Measurement between harmonic-generation synthesis and a frequency-division femtosecond comb. *Phys. Rev. Lett.*,85(18):3797-3800,2000.

易舒. 第一个测量地球的人. 奥秘,5:32-33,1994.

伊捷尔松 H 著. 宁津生,管泽霖,方瑞首译. 位理论及其在地球形状

理论和地球物理中的应用. 北京:中国工业出版社,1963.

Young B C, Cruz F C, Itano W M, Bergquist J C. Visible lasers with subhertz linewidths. *Phys. Rev. Lett.*, 82(19):3799-3802, 1999.

岳英. 扭称弱等效原理实验中的引力梯度效应研究. 硕士论文. 武汉:华中科技大学,2005.

Zahradnicek J. Resonanzmethode für die Messung der Gravitationskonstante mittels der Drehwaage. *Phys. Zeitschr.*, 34: 126-133, 1933.

Zeeman P. Fresnel's coefficient for light of different colours. (First part). *Proc. Kon. Acad. van Weten*, 17: 445 - 451, 1914.

Zeeman P. Fresnel's coefficient for light of different colours. (Second part). *Proc. Kon. Acad. van Weten*, 18: 398 - 408, 1915.

Zeeman P, De Groot W, Snethlage A, Dibbetz G C.. The propagation of light in moving, transparent, solid substances: III. Measurements on the Fizeau-effect in flint glass. *Proc. R. Acad. Sci. Amsterdam*, 23: 1402-1411, 1922.

Zeeman P, Snethlage A. The propagation of light in moving, transparent, solid substances. II. Measurements on the Fizeau-effect in quartz. *Proc. R. Acad. Sci. Amsterdam*, 22:512-522, 1920.

曾谨言. 量子力学 I. 北京: 科学出版社,2000.

曾谨言. 量子力学 II. 北京: 科学出版社,2001.

张元仲. 狭义相对论实验基础. 北京:科学出版社,1979.

郑铨. 狭义相对论质疑. 北京:学术出版社,1989.

钟秋菊. 虚拟压缩恢复法的应用和精度评估. 硕士论文. 武汉:武汉大学,2006.

Zhu S Y, Groten E. Relaivistic effects in VLBI time delay measurement. *Manu. Geod.*, 13:33-39, 1988.

祝永刚,徐正扬. 惯性测量系统的理论及应用. 北京: 测绘出版社, 1989.

索　　引

D

H

J

K

L

M

N

O

P

Q

R

S

T

W

X

Y

Z

[General Information]
书名=相对论与相对论重力测量
作者=申文斌，宁津生，晁定波编
页数=328
SS号=12148442
DX号=
出版日期=2008.12
出版社=武汉大学出版社